КВАНТОВАЯ И ГРАВИТАЦИОННАЯ ФИЗИКА
4:026, 24 с., 31.12.2023; doi:10.9751/KGF.4-026.8400
ISSN 2181-0478; EISSN 2181-0494

Основы время-симметричной физики. 1. Время-симметричные теория относительности и релятивистская квантовая механика

Захид Закир[1]

Аннотация

Сформулирована время-симметричная теория (ВСТ) как теоретическая основа время-симметричной физики (ВСФ), классической, релятивистской и квантовой. ВСТ исходит из широко используемого в физики частиц факта, что описание античастиц положительной энергии, идущих вперёд в пространстве и времени, эквивалентно описанию частиц отрицательной энергии, идущих назад в пространстве и времени (Зисман 1940, Штюкельберг 1941, Фейнман 1949). В ВСТ этот фундаментальный факт обобщается, формулируя принцип эквивалентности физики частиц и применив его на все физические явления в системе покоя частиц отрицательной энергии. В результате, группа преобразований ВСТ включает также инерциальные системы, которые движутся назад в пространстве и времени с координатами, связанными с обычными координатами 4-инверсией. Это привело к формулировке время-симметричной теории относительности и соответствующей релятивистской квантовой механики. В последней вероятности остаются положительными, но билинейные формы волновых функций связаны с потоками вероятностей, знаки которых зависят от направления движения вдоль осей координат, включая ось времени. Поэтому в ВСТ уравнение Клейна-Гордона является состоятельным уравнением для амплитуд вероятностей, а теория фермионов содержит необходимые коррективы, которые делают её физически более последовательной, не меняя её основные наблюдательные следствия. Применения ВСТ к квантовым полям будут рассмотрены во второй статье.

Ключевые слова: античастицы, энергия вакуума, скалярная частица, фермионы, уравнение Клейна-Гордона, уравнение Дирака, вероятностная интерпретация

Содержание

[1] *Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент, Узбекистан*; zzakir@qgph.org, ORCID

1. Введение

Формализм релятивистской квантовой теории ведёт к частицам отрицательной энергии, физическая интерпретация которых долгое время оставалась противоречивой. В 1940-е годы интерпретация Зисмана-Штюкельберг-Фейнмана (ЗШФ) устранила основные из этих противоречий [1,2,3]. В этой интерпретации используется формальная аналогия между описаниями античастиц положительной энергии, идущих вперёд в пространстве и времени, и частиц отрицательной энергии, идущих назад в пространстве и времени. В отличие от теории дырок, применимой только к фермионам и ведущей к расходящимся энергии и заряду вакуума, интерпретация ЗШФ применима ко всем частицам и в ней нет проблем с энергией и зарядом основного состояния. Интерпретация ЗШФ широко применяется в физике частиц как удобный способ ковариантного описания античастиц в терминах частиц и проявляется в кроссинг-симметрии [4,5].

В предыдущих статьях [6] был сформулирован метод симметричного по времени квантования (СВК) релятивистских полей, в котором, во-первых, квантовая теория поля становится совместимой с интерпретацией ЗШФ, а во-вторых, исчезает проблема с расходимостями в энергии и заряде вакуума свободных полей. Если интерпретации ЗШФ естественным образом обеспечивает в физике частиц ковариантность описания и зануление энергии и заряда вакуума, то необходимо согласовать с этой интерпретацией также и её теоретические основы - теорию относительности и квантовую механику. Это и является целью данной и следующей статьей – сформулировать основы время-симметричной теории (ВСТ), включающей время-симметричные формулировки теории относительности, релятивистской квантовой механики и квантовой теории поля.

В ВСТ фундаментальный факт, выраженный в интерпретации ЗШФ, обобщается и на его основе формулируется *принцип эквивалентности физики частиц*, который применён и на системы покоя частиц отрицательной энергии. Тем самым, в ВСТ не только античастицы, но и их системы покоя описываются как идущие назад во времени, с осью времени направленной в прошлое обычного времени. Поэтому в ВСТ группа Пуанкаре расширена на такие инерциальные системы, координаты которых связаны с обычными координатами пространственно-временной инверсией (4-инверсией). ВСТ есть естественный формализм для описания систем с античастицами и *CPT*-симметрией.

В статье также будет показано, что ВСТ снимает противоречия и недоразумения в прежней формулировке релятивистской квантовой теории, ставшие элементами стандартной парадигмы по историческим причинам. В частности, билинейные формы волновых функций, которые связывались с вероятностями, в действительности связаны с потоками вероятностей, знак которых зависит от направления движения частицы в пространстве или в одном из двух направлений времени.

В случае фермионов физическая картина не меняется и добавляются лишь технические усложнения, связанные со спинорами. При этом ВСТ вносит небольшие коррективы, которые делают теорию фермионов физически более последовательной, не меняя её основные наблюдательные следствия.

В разделе 2 описывается интерпретация ЗШФ и принцип эквивалентности физики частиц, затем формулируются основанная на этом принципе ВСТ. В разделе 3 описывается время-симметричная релятивистская квантовая механика скалярной частицы, а в разделе 4 - фермионной частицы. Время-симметричная квантовая теория поля будет рассмотрена в следующей статье. Более детальное обсуждение и следствия ВСТ будут приведены в книге [7].

2. Время-симметричная теория относительности

2.1. Интерпретация ЗШФ частиц отрицательной энергии

Эквивалентность между описанием античастиц положительной энергии, идущих вперёд в пространстве и времени, и описанием частиц отрицательной энергии, идущих назад в пространстве и времени была открыта Г. Зисманом в 1940 г. [1] и затем Е. Штюкельбергом в 1941 г. [2]. В 1949 гг. Р. Фейнман, ссылаясь на Штюкельберга, использовал эту эквивалентность в пропагаторном подходе к релятивистской квантовой механике и развил на её основе диаграммную технику [3]. Этот подход затем успешно конкурировал с квантовой теорией поля и лежит в основе стандартного курса релятивистской квантовой механики (см. [4,5]).

Штюкельберг и Фейнман рассматривали этот способ описания античастиц прагматично, как удобный эвристический метод ковариантного описания квантовых процессов с античастицами, особенно полезный в диаграммной технике.

Зисман же не только открыл эту эквивалентность первым, но и дал для неё более фундаментальное обоснование, исходя из понятий релятивистской теории ещё до их применения к квантовой теории. Он показал, что собственное время всех частиц всегда возрастает вдоль их траекторий, тогда как время обычной системы отсчёта, где частица движется, может при этом уменьшаться, если траектория идёт назад в этом времени, что и имеет место для частиц отрицательной энергии [1] (см. также [8]).

Здесь этот подход будет рассмотрен кратко, а в следующем разделе он будет обобщён путём введения систем покоя частиц отрицательной энергии и формулировки для них нового физического принципа.

В релятивистской теории время t, измеряемое часами в инерциальной системе отсчёта K и собственное время частицы τ, измеряемое часами в её системе покоя K' связаны соотношениями:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2, \tag{1}$$

$$d\tau = \pm dt\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}, \tag{2}$$

где $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{r})$ координаты частицы в K.

Обычно знак перед корнем в (2) брался положительным, считая, что направление хода τ всегда совпадает с направлением хода t. Этот выбор соответствовал выбору частиц положительной энергии, тогда как отрицательный знак в (2), как показал Зисман [1,8], будет соответствовать выбору частиц отрицательной энергии, которых можно использовать для описания античастиц.

Такой подход был положен в основу интерпретации ЗШФ, но в ВСТ, который будет формулироваться в следующем разделе, он дополняется принципиально важным элементом. А именно тем, что в действительности знак в (1) зависит от сочетания направлений эволюции частицы и системы отсчёта, где описывается движение частицы. В частности, для частиц, идущих назад в обычном времени этот знак будет положительным в системах отсчёта, которые также идут назад в обычном времени.

Для 4-скорости u^μ имеют место соотношения:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dx^\mu}{c\,d\tau} = \frac{dx^\mu}{cdt}\frac{dt}{d\tau} = (u_0, \mathbf{u}) = (1, \mathbf{v}/c)\frac{dt}{d\tau}, \tag{3}$$

$$u_0 = \frac{dt}{d\tau} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}. \tag{4}$$

Поэтому для 4-импульса частицы p^μ, с учётом $u^\mu u_\mu = 1$, имеем:

$$p^\mu = mcu^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} = (p^0, \mathbf{p}), \quad p^\mu p_\mu = m^2c^2, \tag{5}$$

где m - масса покоя. Для энергии $E = cp_0$ соотношения (3)-(5) дают:

$$E = mc^2\frac{dt}{d\tau} = \pm\frac{mc^2}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}} = \pm c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2.} \tag{6}$$

Таким образом, отрицательный знак в (2) ведёт к отрицательному знаку энергии в (6).

Если энергия частицы в принципе может иметь два знака, то возникают вопросы о том, существуют ли такие состояния и если да, то какова их физическая интерпретация. Ответы оказались нетривиальными: таких состояний в природе нет, но их можно вводить как способ описания античастиц положительной энергии. Такое описание представляет собой не только красивый и удобный эвристический метод, широко используемый в физике частиц, но и оказалось естественным языком для формализма релятивистской теории. Для ковариантного описания античастиц необходимо расширить формулировку релятивистской теории также и на частицы отрицательной энергии.

Для этого с несколько иной точки зрения рассмотрим вопрос о том, что означает изменение знака энергии в (6). Как ориентир рассмотрим фактор, определяющий знаки пространственных компонент импульса частицы. В системе отсчёта K вектор 3-импульса $\mathbf{p}$ можно представить как сумму его проекций на оси координат с ортами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$: $\mathbf{p} = p^1\mathbf{e}_1 + p^2\mathbf{e}_2 + p^3\mathbf{e}_3.$ Здесь его координаты определены как:

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}^1 = p^1 = m\frac{dx^1}{d\tau} = mv^1\frac{dt}{d\tau}, \ldots \tag{7}$$

и их знак зависит от произведения знаков скорости $v^1 = dx^1/dt$ и отношения $dt/d\tau$.

Для частиц положительной энергии $E > 0$ всегда $dt/d\tau > 0$ и знак p^1 совпадает со знаком v^1. Поэтому при движении вдоль оси x^1 системы K с постоянной скоростью $v^1 > 0$ импульс положителен $p^1 > 0$ и с ростом τ вдоль траектории $\Delta\tau > 0$ растут также временная и пространственная координаты: $\Delta t > 0$ и $\Delta x^1 > 0$. Если позже скорость частицы изменит знак и станет отрицательным $v^1 < 0$, то импульс также станет отрицательным $p^1 < 0$. Тогда с ростом τ вдоль траектории $\Delta\tau > 0$ растёт только временная координата $\Delta t > 0$, а пространственная координата уменьшается: $\Delta x^1 < 0$. Итак, при изменении направления движения частицы с прямого на обратное, соответствующая координата уменьшается, а импульс меняет знак, и наоборот, если импульс отрицателен, то частица движется в обратном к данной оси направлении. При этом во всех случаях τ растёт вдоль траектории $\Delta\tau > 0$.

Возвращаясь к выяснению фактора, определяющего знак энергии, видим, что ситуация здесь аналогичная, но теперь речь идёт об эволюции вдоль оси времени и изменении её направления с изменением соответствующей компоненты импульса p^0, пропорциональной энергии E.

Если свободная частица положительной энергии $E > 0$ в момент $\tau_{(1)} = 0$ покоилась точке $\mathbf{r} = 0$ системы отсчёта K и $\Delta\mathbf{r} = 0$, то её мировая линия параллельна оси t и вдоль неё $dt/d\tau > 0$. В ходе дальнейшей эволюции возрастают как τ, так и t: $\Delta\tau > 0$, $\Delta t > 0$. Если же энергия частицы была отрицательной $E < 0$, то её мировая линия идёт обратно оси t и, согласно (6), будет $dt/d\tau < 0$, т.е. с ростом τ вдоль траектории t будет уменьшаться: $\Delta\tau > 0$, $\Delta t < 0$.

Таким образом, изменения знаков компонент 4-импульса p^1 и p^0 объясняются одинаково и связываются с изменениями направлений движения частицы относительно соответствующих осей системы координат в пространстве событий.

Далее можно показать, что диаграммы, в которых мировые линии частицы, идущие вверх, поворачиваются и начинают идти вниз, и наоборот, идущие вниз, поворачиваются и начинают идти вверх, аналогичны процессам аннигиляции и рождения пар частица-античастица. Это иллюстрирует эквивалентность описания движения античастиц положительной энергии, идущих вперёд во времени, и описания движения частиц отрицательной энергии, идущих назад во времени. Такая формальная эквивалентность и использована в интерпретации ЗШФ, на основе которой создан пропагаторный подход.

2.2. Принцип относительности при время-симметричной эволюции и принцип эквивалентности физики частиц

Классическая, релятивистская и квантовая механика создавались для описания мира из частиц положительной энергии, идущих вперёд во времени в системах отсчёта, базисы которых также состоят из таких же частиц и тоже идут вперёд во времени. Античастицы, которые также положительной энергии, описываются как те же частицы, отличающиеся лишь зарядами, т.е. как зарядово-сопряжённые. Но такое описание античастиц нековариантно, а соответствующая нековариантная диаграммная техника с мировыми линиями частиц и античастиц очень громоздкая.

Ковариантная диаграммная техника же весьма компактна, так как использует мировые линии только частиц, идущих вперёд-назад во времени и поэтому здесь явно, или скрыто используется интерпретация ЗШФ. Например, одна ковариантная однопетлевая диаграмма для вершины соответствует 6 диаграммам нековариантной диаграммной техники с явным указанием мировых линий античастиц и упорядочением во времени трёх вершин.

Формализмы всех трёх видов механики допускали и вторую возможность – описания частиц отрицательной энергии, идущих назад во времени. Но в этом случае необходимо использовать интерпретацию ЗШФ и, как будет показано ниже, требуется также переход к более общей физике, содержащей принципиально новые элементы. То, что такой переход удваивает число степеней свободы, не является чем-то принципиально новым, так как это имеет место и в нековариантной формулировке только с положительными энергиями.

А вот действительно новыми элементами теории являются следующие. Во-первых, системы покоя частиц отрицательной энергии, где и измеряются их собственные времена, сопутствуют этим частицам и поэтому также движутся вспять во времени. При этом движение системы отсчёта обратно во времени означает, что её базис, масштабы и часы построены из античастиц и описывается в терминах частиц, идущих назад во времени. А во-вторых, это обстоятельство требует расширения формализма физических теорий, так как надо включить в него группу преобразований между инерциальными системами, ось временной координаты в которых, где отмечается ход собственного времени, направлена в прошлое обычного времени. И в-третьих, возникают переходы между координатами систем отсчёта с противоположными осями времени. Всё это вносит принципиально новые элементы как в формализм, так и в физические аспекты теорий.

В частности, рождение пары частица-античастица изображается как эволюция в прошлое частицы отрицательной энергии, которая в точке рождения пары меняет направление эволюции и начинает идти вперёд во времени. Тем самым, частице сначала сопутствует система покоя с обратной осью времени, а потом с обычной осью. При аннигиляции пары наоборот, сначала частице сопутствует система покоя с обычной осью времени, а затем с обратной осью.

Рассмотрим описание потока частиц с полем 3-скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ с учётом наличия частиц с обратной эволюцией во времени. Полное число частиц N равно

$$N = \int n(x)\, d^3x = \int n\, dV, \tag{8}$$

где $n(x)$ - плотность числа частиц. Инвариантность N, как и $dN = n\,dV$, числа частиц в элементе объёма dV, позволяет ввести 4-вектор плотности потока j^μ, умножаемого на инвариантный элемент 4-объёма d^4x (см. [9]):

$$dN \cdot dx^\mu = n\frac{dx^\mu}{dt}dtdV = \frac{1}{c}j^\mu d^4x, \tag{9}$$

$$j^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}n = (\pm cn, \mathbf{v}n) = (j^0, \mathbf{j}). \tag{10}$$

Здесь $j^0 = \pm cn$, $\mathbf{j} = \mathbf{v}n$ временная и пространственные компоненты j^μ. Величина временной компоненты 4-скорости $dx^0/dt = \pm c$ хотя и осталась равной скорости света c, но теперь она также имеет два знака для двух типов частиц, которые эволюционируют по оси времени в противоположных направлениях.

Интеграл от j^μ по гиперповерхности S_μ

$$p_N = \int j^\mu dS_\mu \tag{11}$$

даёт полный поток через эту гиперповерхность, т.е. число частиц, пересекающих её за единицу времени. Для гиперповерхности $t = const$ с нормалью $\mathbf{e}_0$, направленной вдоль оси времени, отсюда получаем:

$$p_N = \int j^0 dS_0 = \int j^0 dV = \pm c\int n\,dV, \tag{12}$$

т.е. два потока частиц, идущих в противоположных направлениях оси времени.

Теперь вместо потока из многих частиц рассмотрим поток вероятности в ансамбле систем, где каждая содержит одну флуктуирующую частицу. Вероятность положений частицы в пространстве w тоже инвариантна, и её величина в элементе объёма dV равна $dw = \rho dV$, где $\rho(x)$ - плотность вероятности. Определение полной вероятности

$$w = \int \rho\, dV, \quad \rho = \frac{dw}{dV} \tag{13}$$

позволяет ввести 4-вектор плотности потока вероятности j^μ:

$$dw \cdot dx^\mu = \rho\frac{dx^\mu}{dt}dtdV = \frac{1}{c}j^\mu d^4x, \tag{14}$$

$$j^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}\rho = (\pm c\rho, \mathbf{v}\rho) = (j^0_\pm, \mathbf{j}). \tag{15}$$

Здесь $j^0_\pm = \pm c\rho$, $\mathbf{j} = \mathbf{v}\rho$ временная и пространственные компоненты плотности потока вероятности, и $dx^0/dt = \pm c$ имеет два знака, показывающих направления движения по оси времени. Интеграл от этого потока по гиперповерхности S_μ даёт полный поток вероятности через эту гиперповерхность и для гиперповерхности $t = const$ получаем:

$$p_{w\pm} = \int j^0 dS_0 = \int j_\pm^0 dV = \pm c \int \rho \, dV, \tag{16}$$

т.е. два потока вероятности для двух частиц, идущих в двух направлениях оси времени.

Принцип относительности, естественно, имеет силу и для систем с античастицами и поэтому физические явления с частицами отрицательной энергии в системах отсчёта, движущихся назад во времени должны протекать также, как физические явления с частицами положительной энергии в системах отсчёта, движущихся вперёд во времени. Такое обобщение принципа относительности, как будет рассмотрено в следующем разделе, требует расширения группы преобразований на новый класс систем отсчёта.

Здесь же рассмотрим другой аспект этой ситуации, а именно на вопросе о том, как протекают физические явления с частицами отрицательной энергии в системах отсчёта, движущихся вперёд во времени. В частном случае движения частиц ответ на этот вопрос даёт интерпретация ЗШФ, который фактически является дополнительным постулатом теории. Поскольку этот фундаментальный факт физики частиц в любом случае входит в теорию в виде постулата, то имеет смысл ввести его в наиболее общем виде, сделав применимым для обеих классов систем отсчёта и для все физических систем с обеими знаками энергии.

Поэтому в качестве обобщения интерпретации ЗШФ сформулируем *принцип эквивалентности физики частиц*, который состоит в утверждении о том, что в системах отсчёта, движущихся вперёд во времени, физические явления с объектами с отрицательной энергией, движущихся обратно во времени, эквивалентны физическим явлениям с зарядово-сопряжёнными к ним объектами положительной энергии, идущим вперёд во времени. Этот принцип эквивалентности, в соответствие с принципом относительности, применим к системам отсчёта с базисами обеих знаков энергии.

Этот принцип, вместе с обобщением принципа относительности, означает переход к более общей физике, ВСФ, и к ВСТ как её теоретической основе. В последующих разделах рассмотрим основные положения ВСТ сначала в теории относительности, а затем и в квантовой теории.

2.3. Время-симметричные преобразования систем отсчёта

Рассмотрим теперь системы отсчёта и системы координат в 4-мерном пространстве-времени с учётом возможности эволюции назад во времени.

Начнём с более привычного случая обычного 3-пространства с координатной системой (x_+^1, x_+^2, x_+^3), где два противоположных потока частиц пересекают координатную плоскость (x_+^1, x_+^2) с нормалью $\mathbf{e}_+^3$ вдоль оси x_+^3, первый поток снизу вверх, а второй – сверху вниз. В этой системе координат первый поток с $\mathbf{j}_+^{(+)} = \rho \mathbf{v}_+^{(+)}$ идёт в том же направлении, что и нормаль $\mathbf{e}_+^3$, и поэтому он положителен: $\mathbf{j}_+^{(+)} \cdot \mathbf{e}_+^3 > 0$, а второй поток с $\mathbf{j}_+^{(-)} = \rho \mathbf{v}_+^{(-)}$, направленный обратно, отрицателен: $\mathbf{j}_+^{(-)} \cdot \mathbf{e}_+^3 < 0$.

Введём также вторую координатную систему (x_-^1, x_-^2, x_-^3) с инверсией оси $x_-^i = -x_+^i$ и плоскость (x_-^1, x_-^2) с нормалью $\mathbf{e}_-^3$ вдоль оси x_-^3:

$$x_-^i = a_j^i x_+^j = -x_+^i, \quad a_j^i = -\delta_j^i. \tag{17}$$

В этой системе координат первый поток идёт в обратном направлении к нормали $\mathbf{e}_-^3$ и поэтому он отрицателен: $\mathbf{j}_-^{(+)} \cdot \mathbf{e}_-^3 < 0$, тогда как второй поток идёт в направлении этой нормали и поэтому он положителен: $\mathbf{j}_-^{(-)} \cdot \mathbf{e}_-^3 > 0$.

Пусть в пространстве-времени с координатами $x_+^\mu = (x_+^0, x_+^1, x_+^2, x_+^3)$ имеется двумерная поверхность в пространстве (x_+^1, x_+^2) при $x_+^3 = const$. Картина эволюции во времени частиц на этой плоскости в 3-пространстве событий (x_+^0, x_+^1, x_+^2) будет аналогичной двум противоположным потокам в обычном 3-пространстве. Частицы положительной энергии пересекают гиперповерхность $x_+^0 = const$ снизу вверх, а частицы отрицательной энергии пересекают её сверху вниз. В этой системе координат первый поток вдоль оси времени идёт в том же направлении, что и нормаль $\mathbf{e}_+^0$, которая направлена по оси времени x_+^0, и поэтому этот поток положителен: $\mathbf{j}_+^{0(+)} \cdot \mathbf{e}_+^0 > 0$, а второй поток, направленный обратно оси времени, отрицателен: $\mathbf{j}_+^{0(-)} \cdot \mathbf{e}_+^0 < 0$.

Введём вторую систему координат в пространстве событий $x_-^\mu = (x_-^0, x_-^1, x_-^2, x_-^3)$, где подвергнуты инверсии как пространственные оси, так и временная ось. Две системы координат x_+^μ и x_-^μ связаны операцией 4-инверсии пространственно-временных координат PT:

$$x_-^\mu = a_\nu^\mu x_+^\nu = -x_+^\mu, \quad a_\nu^\mu = -\delta_\nu^\mu. \tag{18}$$

Во второй системе координат первый поток идёт в обратном направлении к нормали $\mathbf{e}_-^0$ и поэтому он отрицателен: $\mathbf{j}_-^{0(+)} \cdot \mathbf{e}_-^0 < 0$, тогда как второй поток идёт в направлении этой нормали и поэтому он положителен: $\mathbf{j}_-^{0(+)} \cdot \mathbf{e}_-^0 > 0$.

Системой покоя частицы положительной энергии является K_+, базис которой состоит из частиц положительной энергии. Пусть в координатах x_+^μ с обычной осью времени $x_+^0 = ct_+$ в начальной гиперповерхности $x_+^0 = 0$ частица была вначале системы 3-координат $x_+^1 = x_+^2 = x_+^3 = 0$. В последующие моменты времени частица и её система покоя K_+ перемещаются вверх по оси времени первоначальной системы координат x_+^μ. Мировые линии частицы и начало координат K_+ тем самым образуют реальную ось времени, совпадая с конечной частью бесконечной математической оси x_+^0 первоначальной системы координат.

Пусть в начальный момент рядом с первой частицей также покоилась частица отрицательной энергии. Её системой покоя становится инерциальная система отсчёта K_-, базис которой состоит из частиц отрицательной энергии, а система координат x_-^μ связана с системой координат x_+^μ преобразованием 4-инверсии PT (18). По оси времени $x_-^0 = ct_-$, направленной обратно к оси x_+^0, отсчитывается собственное время данной частицы. В последующие моменты времени эта частица и начало системы K_- будут перемещаться вниз по первоначальной оси x_+^μ и вверх в первоначальной оси x_-^0. Тем самым мировые линии частицы и начала координат K_- будут образовывать реальную ось времени в пространстве событий, совпадая с конечной частью бесконечной математической оси x_+^0 в нижнем световом конусе K_+ и оси x_-^0 в верхнем конусе K_-.

Таким образом, частицы двух знаков энергии, которые в начальный момент $t_+ = t_- = 0$ находились вблизи точки $\mathbf{r} = 0$, эволюционируют во времени в обратные стороны. В системе отсчёта с осью времени x_+^0 частица положительной энергии и её система покоя K_+ уйдут вверх в будущее $x_+^0 > 0$, а частица с отрицательной энергией и её система покоя K_- уйдут вниз в прошлое $x_+^0 < 0$.

Итак, эволюция частиц и их систем покоя происходит симметрично во времени. Соответственно, преобразования координат в этих двух классах систем отсчёта также будут симметричными. Обычные преобразования Лоренца $a_\nu^\mu(\mathbf{v}_+)$ связывают координаты инерциальных систем K_+ и K'_+ с относительной скоростью $\mathbf{v}_+$:

$$x_+^\mu{}' = a_{\nu++}^\mu x_+^\nu. \tag{19}$$

К ним добавятся формально точно такие же преобразования, связывающие координаты инерциальных систем K_- и K'_- с относительной скоростью $\mathbf{v}_-$:

$$x_-^\mu{}' = a_{\nu--}^\mu x_-^\nu. \tag{20}$$

Матрица $a_{\nu--}^\mu$ такая же, как $a_{\nu++}^\mu$, но с $\mathbf{v}_-$ вместо $\mathbf{v}_+$.

При описании частицы одного знака энергии в координатах системы отсчёта другого знака энергии добавляется также преобразование 4-инверсии *PT* (18):

$$x_+^\mu{}' = a_{\nu+-}^\mu x_-^\nu, \qquad x_-^\mu{}' = a_{\nu-+}^\mu x_+^\nu. \tag{21}$$

В простейшем случае описания в системе K_+ частицы отрицательной энергии, идущей назад во времени, её координаты из системы покоя K_- преобразуются с $a_{\nu+-}^\mu$, включающего инверсию оси времени. Это означает, что в преобразованиях Лоренца из двух знаков корня $\pm\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}$ берётся отрицательный знак и, в частности, преобразование временной координаты принимает вид:

$$x_+^0{}' = -\frac{x_-^0 - \mathbf{x}_- \cdot \mathbf{v}_-/c}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}} \tag{22}$$

Преобразования расширенной группы Пуанкаре, включающей также трансляции начала координат в обеих типах систем координат, принимают вид:

$$x_+^\mu{}' = a_{\nu++}^\mu x_+^\nu + b_+^\mu, \tag{23}$$

$$x_-^\mu{}' = a_{\nu--}^\mu x_-^\nu + b_-^\nu. \tag{24}$$

$$x_+^\mu{}' = a_{\nu+-}^\mu x_-^\nu + b_+^\nu. \tag{25}$$

$$x_-^\mu{}' = a_{\nu-+}^\mu x_+^\nu + b_-^\nu. \tag{26}$$

Более детальное описание свойств преобразований систем отсчёта, движущихся в двух направлениях времени, будет приведено в последующих статьях и в книге [7].

Отметим, что элемент 4-объёма d^4x останется инвариантным относительно этих преобразований при инверсии чётного числа координатных осей, включая ось времени.

2.4. Время-симметричная механика частицы

В системе отсчёта K_+ функция действия для свободных частиц и античастиц положительной энергии одинакова:

$$S = -mc\int_{s_0}^{s_1} ds = -mc^2 \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau = -mc^2 \int_{t(\tau_0)}^{t(\tau_1)} dt \cdot \frac{d\tau}{dt} = -mc^2 \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{1 - \mathbf{v}_+^2 / c^2}, \quad t_1 > t_0, \quad (27)$$

и

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(\mathbf{v}_+^2) = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L_+, \quad L_+ = -mc^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}_+^2 / c^2}, \quad t_1 > t_0. \quad (28)$$

Здесь $\tau_1 > \tau_0$, $t_1 = t(\tau_1)$, $t_0 = t(\tau_0)$, и $d\tau / dt = \sqrt{1 - \mathbf{v}_+^2 / c^2}$.

В K_+ собственное время частиц отрицательной энергии по прежнему возрастает вдоль их траектории $\tau_1 > \tau_0$, но теперь эти частицы, согласно (6), идут в сторону уменьшения временной координаты t и $d\tau / dt = -\sqrt{1 - \mathbf{v}_-^2 / c^2}$. Функция действия для такой частицы принимает вид:

$$S = -mc\int_{s_0}^{s_1} ds = -mc^2 \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau = -mc^2 \int_{t(\tau_0)}^{t(\tau_1)} dt \cdot \frac{d\tau}{dt} = mc^2 \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{1 - \mathbf{v}_-^2 / c^2}, \quad t_1 < t_0. \quad (29)$$

и

$$S = -\int_{t_0}^{t_1} dt\, L(\mathbf{v}_-^2) = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L_-, \quad L_- = mc^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}_-^2 / c^2}, \quad t_1 < t_0. \quad (30)$$

Здесь функция Лагранжа L_- отличается от L_+ знаком.

Взаимодействие может смешивать состояния обеих знаков энергии и поэтому все интегралы по времени удобно записывать в K_+ с одинаковыми пределами $t_1 > t_0$. Для этого в качестве пределов интегрирования в (30) возьмём те же моменты времени, что и в (28). Это приводит к интегралу с изначально переставленными пределами:

$$S = -\int_{t_1}^{t_0} dt\, L(\mathbf{v}_-^2) = \int_{t_1}^{t_0} dt\, L_-, \quad t_1 > t_0, \quad (31)$$

и при последующей перестановке пределов, уже вручную, меняется знак интеграла:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(\mathbf{v}_-^2) = -\int_{t_0}^{t_1} dt\, L_-, \quad t_1 > t_0. \quad (32)$$

В итоге, функция действия частиц двух знаков энергии принимает компактный вид с одинаковыми пределами интегрирования по времени:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt\, [L(\mathbf{v}_+^2) + L(\mathbf{v}_-^2)] = \int_{t_0}^{t_1} dt\, (L_+ - L_-), \quad t_1 > t_0. \quad (33)$$

В общем случае системы с двумя знаками энергии обобщённые координаты $q_\pm = (q_\pm^1, ..., q_\pm^n)$ и их обобщённые скорости $\dot{q}_\pm$ определяют функцию Лагранжа $L_\pm = \pm L(q_\pm, \dot{q}_\pm)$, где $L(q_+, \dot{q}_+)$ для частицы положительной энергии, а $L(q_-, \dot{q}_-)$ есть та же функция Лагранжа, но с заменой переменных q_+ и $\dot{q}_+$ на q_- и $\dot{q}_-$. Действие тогда имеет вид:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt\,(L_+ - L_-) = \int_{t_0}^{t_1} dt\,[L(q_+, \dot{q}_+) + L(q_-, \dot{q}_-)]. \tag{34}$$

В канонической формулировке обобщённые импульсы $p_\pm$, а также функции Гамильтона $H_+ = H(q_+, \dot{q}_+)$ и $H_- = -H(q_-, \dot{q}_-)$ определяются как:

$$p_\pm = \pm\frac{\partial L_\pm}{\partial \dot{q}_\pm} = \frac{\partial L(q_\pm, \dot{q}_\pm)}{\partial \dot{q}_\pm}, \tag{35}$$

$$H_\pm = p_\pm \dot{q}_\pm - L_\pm, \quad H_\pm = \pm H(q_\pm, p_\pm). \tag{36}$$

Уравнения Гамильтона-Якоби, следующие из (34)-(36) имеют вид:

$$\pm\frac{\partial S}{\partial t} + H_\pm = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H(q_\pm, p_\pm) = 0. \tag{37}$$

Для протяжённых объектов и полей вводятся плотности функции Лагранжа L и функции Гамильтона H:

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x[\mathsf{L}_+(q_+, \dot{q}_+) + \mathsf{L}_-(q_-, \dot{q}_-)] = \\ &= \int d^4x\,[p_+\dot{q}_+ + p_-\dot{q}_- - \mathsf{H}_+(q_+, p_+) - \mathsf{H}_-(q_-, p_-)]. \end{aligned} \tag{38}$$

Поскольку интегрирование в (38) производится по 4-объёму, который инвариантен при чётном числе инверсии осей в пространстве событий, то плотность L также инвариантна при этих преобразованиях систем отсчёта в обеих световых конусах. Соответствующие уравнения движения имеют вид:

$$\dot{q}_\pm = \frac{\partial \mathsf{H}_\pm}{\partial p_\pm}, \quad \dot{p}_\pm = \mp\frac{\partial \mathsf{H}_\pm}{\partial q_\pm}. \tag{39}$$

При наличии взаимодействий, смешивающих два состояния, переход к интегралам по времени в K_+ с одинаковыми пределами $t_1 > t_0$ даёт для (34)-(39):

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_0}^{t_1} dt\,L(q_+, \dot{q}_+; q_-, \dot{q}_-) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt\,[p_+\dot{q}_+ + p_-\dot{q}_- - H(q_+, p_+; q_-, p_-)]. \end{aligned} \tag{40}$$

Уравнения Гамильтона-Якоби, следующие из (34)-(36) имеют вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_+, p_+; q_-, p_-) = 0. \tag{41}$$

Для протяжённых объектов и полей имеем:

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x\,\mathsf{L}(q_+, \dot{q}_+; q_-, \dot{q}_-) = \\ &= \int d^4x\,[p_+\dot{q}_+ + p_-\dot{q}_- - \mathsf{H}(q_+, p_+; q_-, p_-)]. \end{aligned} \tag{42}$$

3. Время-симметричная релятивистская квантовая механика скалярной частицы

3.1. Релятивистское уравнение для амплитуды вероятности

В релятивистской теории для комплексной волновой функции $\psi(x)$ свободной скалярной частицы с 4-импульсом $p^\mu = (p^0, \mathbf{p})$, согласно (5), получаем уравнение:

$$p^\mu p_\mu \psi = m^2 c^2 \psi, \tag{43}$$

$$p_{0\pm} = \pm E_p / c, \quad E_p = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}. \tag{44}$$

Подстановка в (43) координатного представления $p^\mu = i\hbar\partial^\mu$ даёт уравнение Клейна-Гордона (КГ) для комплексной амплитуды вероятности или волновой функции:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + \kappa^2)\psi = 0, \quad (\partial^\mu \partial_\mu + \kappa^2)\psi^* = 0, \tag{45}$$

где $\kappa = mc/\hbar$. Решения этих уравнений ψ и ψ^* описывают соответственно начальное и конечное состояния. Каждое из них содержит состояния для двух знаков энергии $\psi_\pm$ и $\psi_\pm^*$, в частности, для начального состояния имеются два гильбертовых пространства с базисными векторами:

$$\psi_+ = a_+ \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_p t - \mathbf{px})\right], \quad \psi_- = a_- \exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_p t - \mathbf{px})\right], \tag{46}$$

где $a_\pm$ - нормировочные константы. В ВСТ частицы с $p_{0-} < 0$ идут назад во времени и описывают античастицы с $p_{0+} > 0$ идущие вперёд во времени.

В нерелятивистской теории вероятность состояния w в области пространства есть интеграл по объёму этой области V от плотности вероятности $\rho(x)$, а ρ прямо связывается с квадратом модуля нерелятивистского предела волновой функции $\breve{\psi}$:

$$w = \int \rho\, dV = \int \breve{\psi}^* \breve{\psi}\, dV. \tag{47}$$

В релятивистской теории волновые функции ψ и ψ^*, удовлетворяющие волновым уравнениям (45), тоже связаны с плотностью вероятности ρ, но не так, как в нерелятивистской теории и для этого есть две причины.

С одной стороны, в (45) комплексная волновая функция ψ, описывающая состояния частицы без спина, должна быть скалярной (или псевдоскалярной) функцией, также как и квадрат её модуля $\psi^* \psi$.

С другой стороны, в релятивистской теории $\pm\rho c = j^0$ становится 4-компонентой вектора $j^\mu = (j^0, \mathbf{j})$, плотности потока вероятности из (15), и поэтому определение (47) заменяется на:

$$p_{w\pm} = \int j_\pm^0 dV. \tag{48}$$

Теперь $p_{w\pm}$ - это поток вероятности по оси времени и может иметь оба знака в зависимости от знака $j_\pm^0$, проекции 4-вектора плотности потока на ось времени.

В результате, во-первых, прямое отождествление скаляра $\psi^*\psi$ с ρ, лежащее в основе нерелятивистской квантовой механики, теперь невозможно и выражение для $j^0_\pm$ через волновые функции ψ и ψ^* должно быть уточнено.

Во-вторых, $p_{w\pm}$ в (48) выражает не вероятность состояния, а интеграл от j^μ, проекции 4-вектора потока на нормаль к гиперповерхности $t = const$. Если проекции компонент потока $\mathbf{j}$ на пространственные оси дают плотности потоков вдоль этих осей, то компонента $j^0_\pm$, проекция на временную ось, даёт плотность потока вдоль оси t.

В-третьих, поскольку $j^0_\pm$ есть проекция на ось t, то для потока положительно-энергетических частиц, идущих в направлении этой оси, проекция положительно-определённая $j^0_+ \geq 0$, а для потока отрицательно-энергетических частиц, идущих обратно оси, эта проекция отрицательно-определённая $j^0_- \leq 0$. Тем самым, в релятивистской квантовой теории плотности вероятности остаются положительно-определёнными $\rho \geq 0$, а разный знак потоков вероятности для частиц разного знака энергии выражает противоположность их движения по оси времени.

Для выражения $j^0_\pm$ через ψ и ψ^* строится аналог вектора плотности потока так, как это делается в нерелятивистской теории - первое из уравнений в (45) надо умножить слева на ψ^*, а второе на ψ и затем второе выражение вычесть из первого:

$$\psi^*\partial_\mu\partial^\mu\psi - \psi\partial_\mu\partial^\mu\psi^* = \partial_\mu(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*) = 0. \tag{49}$$

Подстановка коэффициентов затем даёт выражение для сохраняющегося вектора j^μ:

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*) = (j_0, \mathbf{j}), \quad \partial_\mu j^\mu = 0, \tag{50}$$

временная и пространственные компоненты которого имеют вид:

$$j^0 = \frac{i\hbar}{2mc}(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*), \tag{51}$$

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*). \tag{52}$$

Итак, в релятивистской квантовой механике волновые функции ψ и ψ^* не выражаются прямо через плотность вероятности ρ, а выражаются через проекцию 4-компоненты плотности потока вероятности $j^0_\pm$.

Для свободных частиц с волновыми функциями (46) поток в пространстве равен $\mathbf{j} = \mathbf{p}/m$. Аналогично, компонента потока $j_{0\pm}$ также имеет разные знаки в зависимости от знаков энергии. Для волновых функций (46), при нормировке на $2E_p$ частиц в единице объёма $V = 1$, потоки вероятности для состояний с разными знаками энергии даются интегралами:

$$p_w = \int j^0_\pm \, dV = \pm\frac{E_p}{mc}. \tag{53}$$

Это выражение всегда положительно для положительно-энергетических частиц и всегда отрицательно для отрицательно-энергетических частиц.

Итак, в отличие от прежних трактовок, в ВСТ корректно учитывается физический смысл $j_{\pm}^{0}$ как плотности потока вероятности вдоль оси времени, имеющей два знака для частиц двух знаков энергии.

Тем самым ВСТ исключает из релятивистской квантовой механики одно из её абсурдных положений прежней формулировки– утверждение о том, что $j_{\pm}^{0}$ является плотностью заряда. В результате далее утверждалось, что $j_{\pm}^{0}$ исчезает для нейтральных частиц, для чего волновая функция должна была быть вещественной. При этом не обращалось внимания на тот факт, что для свободных частиц требование вещественности волновой функции означает отрицание их основных квантовых свойств. В частности, в нерелятивистском пределе уравнение КГ переходит в уравнение Шрёдингера, где требование вещественности волновой функции просто недопустимо, так как тогда, в частности, исчезает обычная зависимость от времени и все волновые свойства ансамблей частиц. Например, ансамбль протонов будет интерферировать при прохождении через две щели, а такой же ансамбль нейтронов не будет интерферировать, что абсурдно. Отсутствие в ВСТ такой проблемы будет обсуждаться также в следующем разделе.

3.2. Волновые уравнения с производными по времени первого порядка

В нерелятивистской квантовой механике уравнение Шрёдингера позволяло вычислить волновую функцию и её производную по времени исходя из начальных значений волновой функции. В релятивистской квантовой механике же волновые уравнения (45) содержат производную по времени второго порядка и поэтому в начальный момент надо задавать начальные значения как волновой функции, так и её первой производной по времени. Это различие считалось одним из главных недостатков волнового уравнения КГ (45).

Но позже были найдены представления этих волновых уравнений в виде двух уравнений с производными по времени первого порядка (см. [10]). Вместо комплексной волновой функции и её производной по времени можно ввести две функции φ, χ:

$$\psi = \varphi + \chi, \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = mc^2(\varphi - \chi). \tag{54}$$

Тогда уравнение для ψ в (45) перейдёт в систему из двух волновых уравнений:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta(\varphi + \chi) + mc^2\varphi, \tag{55}$$

$$-i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta(\varphi + \chi) + mc^2\chi. \tag{56}$$

Такое удвоение числа уравнений имеет фундаментальную причину и следует из факта удвоения гильбертова пространства из-за наличия состояний двух знаков энергии, описывающих частицы и античастицы. Нерелятивистский предел же этих уравнений даёт отдельное уравнение Шрёдингера для каждого из знаков энергии.

Поэтому причиной различия было то, что в нерелятивистской квантовой механике частицы и античастицы описывались одним и тем же волновым уравнением для положительных энергий, тогда как в ВСТ даже в нерелятивистском приближении необходимы два уравнение Шрёдингера для состояний двух знаков энергии.

Два уравнения (55)-(56) можно записать в виде одного матричного уравнения с комбинированной волновой функцией Ψ и гамильтонианом H:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H\Psi,\qquad \Psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}, \tag{57}$$

$$H=(\tau_3+i\tau_2)\frac{\mathbf{p}^2}{2m}+\tau_3 mc^2, \tag{58}$$

где τ_i - изоспиновые 2×2 матрицы.

В этом представлении проекция плотности потока вероятности принимает вид:

$$j^0=j_+^0+j_-^0=c(\varphi^*\varphi-\chi^*\chi)=c\Psi^*\tau_3\Psi. \tag{59}$$

До сих пор это выражение, из-за отрицательного знака у второго члена, трактовалось как выражение для плотности заряда и поэтому для нейтральных частиц оно должно было равняться нулю. В ВСТ j^0 есть плотность потока вероятности, и она отлична от нуля для всех частиц независимо от их заряда, т.е. не зануляется и для нейтральных частиц. Из плотности потока вероятности можно образовать и плотность потока заряда путём умножения на константу взаимодействия, т.е. величину заряда, e. Тогда такой поток, переносящий электрический заряд, очевидно зануляется для нейтральных частиц, но не из-за исчезновения потока вероятности, что было бы абсурдно, а из-за равенства нулю константы взаимодействия: $e=0$.

3.3. Нерелятивистский предел релятивистского волнового уравнения

В волновых уравнениях (45) обычно рассматривается нерелятивистский предел состояний положительной энергии с асимптотикой $\exp(-i\omega t)$. Здесь же рассмотрим этот предел для состояний обеих знаков энергии $\psi=\psi_++\psi_-$ с асимптотиками $\exp(\mp i\omega t)$.

В нерелятивистском пределе кинетическая энергия частицы $\breve{E}_p=E_p-mc^2$ мала по сравнению с энергией покоя $\breve{E}_p\ll mc^2$ и поэтому в зависимости от времени волновой функции $\psi(x)$ часть, зависящая от mc^2, быстро осциллирует. Эту высокочастотную часть можно отделить от более медленной части, для чего в $\psi(x)$ выделяются две компоненты $\psi_\pm$, соответствующие состояниям разного знака энергии:

$$\psi_+=\breve{\psi}_+\exp\left(-\frac{imc^2}{\hbar}t\right),\quad \psi_-=\breve{\psi}_-\exp\left(\frac{imc^2}{\hbar}t\right). \tag{60}$$

Здесь $\breve{\psi}_\pm$ - медленно меняющиеся во времени части волновых функций, для которых:

$$\left|i\hbar\frac{\partial\breve{\psi}_\pm}{\partial t}\right|\approx\breve{E}_p\breve{\psi}_\pm\ll mc^2\breve{\psi}_\pm. \tag{61}$$

Первые и вторые производные по времени от $\psi_\pm$ тогда принимают вид:

$$\frac{\partial\psi_\pm}{\partial t}=\left(\frac{\partial\breve{\psi}_\pm}{\partial t}\mp\frac{imc^2}{\hbar}\breve{\psi}_\pm\right)\exp\left(\mp\frac{imc^2}{\hbar}t\right)\approx\mp\frac{imc^2}{\hbar}\breve{\psi}_\pm\exp\left(\mp\frac{imc^2}{\hbar}t\right) \tag{62}$$

$$\frac{\partial^2\psi_\pm}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\breve{\psi}_\pm}{\partial t}\mp\frac{imc^2}{\hbar}\breve{\psi}_\pm\right)\exp\left(\mp\frac{imc^2}{\hbar}t\right)\right]$$
$$\approx\left(\mp\frac{2imc^2}{\hbar}\frac{\partial\breve{\psi}_\pm}{\partial t}-\frac{m^2c^4}{\hbar^2}\breve{\psi}_\pm\right)\exp\left(\mp\frac{imc^2}{\hbar}t\right). \tag{63}$$

Подстановка их в волновое уравнение (45) даёт два уравнения Шрёдингера для состояний двух знаков энергии:

$$i\hbar\frac{\partial\breve{\psi}_\pm}{\partial t}=\mp\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\breve{\psi}_\pm \tag{64}$$

Рассмотрим нерелятивистский предел для волновых уравнений с производными по времени только первого порядка. Для покоящейся свободной частицы нет кинетической энергии и волновые уравнения (55)-(56) и их решения принимают вид:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}=mc^2\varphi,\quad \varphi(t)=a\cdot\exp\left(-\frac{i}{\hbar}mc^2t\right), \tag{65}$$

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}=-mc^2\chi,\quad \chi(t)=a\cdot\exp\left(\frac{i}{\hbar}mc^2t\right). \tag{66}$$

Поэтому в нерелятивистском приближении для движущейся частицы имеем:

$$\varphi=\breve{\varphi}\cdot\exp\left(-\frac{i}{\hbar}mc^2t\right),\quad \chi=\breve{\chi}\cdot\exp\left(\frac{i}{\hbar}mc^2t\right), \tag{67}$$

где $\breve{\varphi}$ и $\breve{\chi}$ - медленно меняющиеся части. Из (55)-(56) тогда следуют:

$$i\hbar\frac{\partial\breve{\varphi}}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\breve{\varphi}-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\breve{\chi}\cdot\exp\left(\frac{2i}{\hbar}mc^2t\right), \tag{68}$$

$$-i\hbar\frac{\partial\breve{\chi}}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\breve{\chi}-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\breve{\varphi}\cdot\exp\left(-\frac{2i}{\hbar}mc^2t\right). \tag{69}$$

В этих уравнениях в нерелятивистской области надо произвести усреднение по высокочастотным вкладам в интервале времени $\Delta t_{усред}$, который достаточно мал по сравнению с периодами изучаемых процессов, но достаточно велик по сравнению с комптоновским периодом: $\hbar/\breve{E}_p\gg\Delta t_{усред}\gg\hbar/mc^2$. Тогда быстро осциллирующие экспоненты в (68)-(69) дают практически исчезающий вклад и эти уравнения переходят в два уравнения Шрёдингера, описывающие частицы двух знаков энергии:

$$i\hbar\frac{\partial\breve{\varphi}}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\breve{\varphi},\quad i\hbar\frac{\partial\breve{\chi}}{\partial t}=\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\breve{\chi}. \tag{70}$$

4. Время-симметричная релятивистская квантовая механика частицы спина ½

4.1. Об обоснованиях перехода от уравнения КГ к уравнению Дирака

В релятивистской квантовой механике переход от уравнения КГ к уравнению Дирака обосновывался необходимостью решения двух проблем:

а) уравнение КГ второго порядка по производной по времени и надо задавать начальные значения как волновой функции, так и её производной по времени;

б) билинейное выражение (51) не является положительно-определённой и поэтому не может прямо интерпретироваться как плотность вероятности.

Первая проблема была решена ещё в ранние периоды - уравнение КГ было записано в виде двух уравнений с производными первого порядка (см. [10] и раздел 3.2) и эта система уравнений для скалярной частицы аналогична уравнению Дирака. Удвоение уравнений связано с удвоением гильбертова пространства в релятивистской теории из-за наличия частиц отрицательной энергии, описывающих античастицы.

В ВСТ отпадает также и вторая проблема, так как билинейное выражение (51) описывает не плотность вероятности, а плотность потока вероятности по оси времени и знак потока указывает противоположность эволюции частиц разного знака энергии.

В результате, единственным отличием уравнений КГ и Дирака является то, что последнее является системой уравнений для *спинорных* волновых функций для частиц спина ½, переходящей в нерелятивистском пределе в уравнение Паули.

Таким образом, отличие уравнений КГ и Дирака сводится лишь к различию спинов частиц, состояние которых они описывают. Каждое из этих уравнений описывает частицы двух знаков энергии, оба имеют корректные нерелятивистские пределы и у них нет проблем с вероятностной интерпретацией волновых функций.

Далее в данной части статьи будут рассмотрены некоторые уточнения, которые вносит ВСТ в теорию частиц спина ½.

4.2. Уравнения Дирака для частиц положительной энергии и их решения

В теории частиц спина ½ отличие ВСТ от прежней стандартной формулировки, как и в случае скалярной частицы, состоит в акцентировании на различиях плотности вероятности и плотности потока вероятности при преобразованиях Лоренца и инверсии. Это позволяет корректно интерпретировать отрицательный знак потока вероятности для отрицательных энергий. Поэтому в данном разделе приведём стандартные соотношения для положительной энергии, которые далее будут использованы при формулировке последовательной теории частиц отрицательной энергии.

В системе отсчёта K_+, базис которой состоит из частиц положительной энергии, волновые функции для частиц спина ½ и положительной энергии ψ_+^r и $\bar{\psi}_+^r \equiv \psi_+^{r+}\gamma^0$, где $r = 1,2$, являются биспинорами и удовлетворяют уравнениям Дирака:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_+^r - \kappa\psi_+^r = 0, \tag{71}$$

$$i\,\partial_\mu \bar{\psi}_+^r \gamma^\mu + \kappa\bar{\psi}_+^r = 0. \tag{72}$$

При переходе из K в другую систему отсчёта K' координаты, волновые функции и матрицы Дирака преобразуются как:

$$x^\mu{}' = a_\nu^\mu x^\nu, \tag{73}$$

$$\psi'(x') = S(a)\psi(x), \tag{74}$$

$$S^{-1}(a)\gamma^{\mu}S(a)=a_{\nu}^{\mu}\gamma^{\nu}, \tag{75}$$

где матрица S равна

$$S(a)=\exp\left(-\frac{i}{4}\omega\sigma_{\mu\nu}I_{n}^{\mu\nu}\right). \tag{76}$$

Здесь ω - «угол поворота» вокруг оси с направлением n, $\sigma_{\mu\nu}=i[\gamma_{\mu},\gamma_{\nu}]/2$ и $I_{n}^{\mu\nu}$ - матрица поворота. В общем случае, и в частности при преобразованиях Лоренца, имеет место соотношение $S^{-1}=\gamma^{0}S^{+}\gamma^{0}$, при этом матрица S унитарна $S^{-1}=S^{+}$ лишь при преобразованиях только пространственных координат, включая их инверсию.

Простейшими решениями уравнений (71)-(72) являются плоские волны:

$$\psi_{+}^{r}=u^{r}(p)\exp(-ip_{\mu}x^{\mu}/\hbar). \tag{77}$$

В этом случае биспиноры $u^{r}(p_{0},\mathbf{p})$ проще всего найти в системе покоя K'_{+}, которая сопутствует частице. В этой системе $u^{r}(mc,0)$ и уравнения (71)-(72) упрощаются:

$$i\gamma^{0}\partial_{0}\psi_{+}^{r}=\kappa\psi_{+}^{r},\quad i\partial_{0}\bar{\psi}_{+}^{r}\gamma^{0}=-\kappa\bar{\psi}_{+}^{r}, \tag{78}$$

а их решения равны:

$$\psi_{+}^{r}=u^{r}(0)\exp(-imc^{2}t/\hbar), \tag{79}$$

$$u^{1}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad u^{2}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{80}$$

Далее, используя (73)-(76) производятся преобразования Лоренца над этой волновой функцией и находится её вид (77) в системе отсчёта K_{+}, где эта частица движется. В результате этих преобразований биспиноры $u^{r}(p)$ принимают вид:

$$u^{1}(p)=\sqrt{\frac{\tilde{p}}{2mc}}\begin{pmatrix}1\\0\\p_{z}/\tilde{p}\\p_{+}/\tilde{p}\end{pmatrix},\quad u^{2}(p)=\sqrt{\frac{\tilde{p}}{2mc}}\begin{pmatrix}0\\1\\p_{-}/\tilde{p}\\-p_{z}/\tilde{p}\end{pmatrix}, \tag{81}$$

где $\tilde{p}=mc+E_{p}/c$, $p_{\pm}=p_{1}\pm ip_{2}$. Они удовлетворяют соотношениям:

$$\bar{u}^{r}(p)u^{r}(p)=\delta^{rr'}, \tag{82}$$

$$\bar{u}^{r}(p)\gamma^{0}u^{r}(p)=u^{r+}(p)u^{r}(p)=\delta^{rr'}E_{p}/mc^{2}. \tag{83}$$

что даёт условия нормировки для волновых функций (77):

$$\bar{\psi}_{+}^{r}\psi_{+}^{r'}=\delta^{rr'}, \tag{84}$$

$$\bar{\psi}_{+}^{r}\gamma^{0}\psi_{+}^{r'}=\psi_{+}^{r+}\psi_{+}^{r'}=\delta^{rr'}E_{p}/mc^{2}. \tag{85}$$

Для выражения сохраняющегося 4-вектора потока вероятности j^μ через ψ и $\bar{\psi}$ уравнение (71) умножается слева на $c\bar{\psi}$, а (72) справа на $c\psi$ и результаты складываются:

$$c\bar{\psi}\,\gamma^\mu\partial_\mu\psi + c(\partial_\mu\bar{\psi})\,\gamma^\mu\psi = \partial_\mu(c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = \partial_\mu j^\mu = 0, \tag{86}$$

$$j^\mu = c\bar{\psi}\,\gamma^\mu\psi. \tag{87}$$

Из (85) следует, что 4-компонента плотности потока вероятности для частиц положительной энергии тоже положительно-определённая: $j^0_+ = c\psi^+_+\psi_+ = cu^+u \geq 0$.

4.3. Уравнения Дирака для частиц отрицательной энергии и их решения

В системе отсчёта K_- базис состоит из частиц отрицательной энергии, а система координат связана с координатами K_+ операцией 4-инверсии TP :

$$x^\mu_- = a^\mu_\nu x^\nu = -x^\mu, \quad a^\mu_\nu = -\delta^\mu_\nu. \tag{88}$$

Волновые функции для частиц отрицательной энергии и спина ½ являются биспинорами, удовлетворяющими таким же уравнениям Дирака как и в (71)-(72) ($r = 3, 4$):

$$i\gamma^\mu\partial_{\mu-}\psi^r_- - \kappa\psi^r_- = 0, \tag{89}$$

$$i\,\partial_{\mu-}\bar{\psi}^r_-\gamma^\mu + \kappa\bar{\psi}^r_- = 0. \tag{90}$$

Поскольку при 4-инверсии $\partial_\mu \to \partial_{\mu-} = -\partial_\mu$, то матрица преобразования спиноров TP должна антикоммутировать с γ^μ, то для этой матрицы получаем:

$$TP = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 = \gamma^5 \tag{91}$$

$$\psi'(x') = PT\psi(x) = \gamma^5\psi(x), \tag{92}$$

$$(PT)^{-1}\gamma^\mu PT = \gamma^5\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^\mu. \tag{93}$$

Из (91), с учётом $P = \gamma^0$, следует, что матрица обращения оси времени T имеет вид:

$$T = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{94}$$

В прежней стандартной формулировке операция инверсии оси времени разделялась на две стадии. Это зарядовое сопряжение $\psi_c = i\gamma^2\psi^*$, состоящее из комплексного сопряжения и умножения на $C = i\gamma^2$, а также вигнеровское обращение времени с матрицей $T_W = i\gamma^1\gamma^3$ и тоже с комплексным сопряжением: $\psi(t') = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(t)$. В итоге комплексное сопряжение, произведённое дважды, отпадало и получалась инверсия оси времени как в (94):

$$T = iCT_W. \tag{95}$$

При инверсии оси времени вместо комплексного сопряжения происходит перестановка начального и конечного состояний, так как прежняя эволюция идёт в обратном направлении к новой оси.

При переходе из K_- в другую систему отсчёта K'_- координаты, волновые функции и матрицы Дирака преобразуются также, как в (73)-(76). Здесь добавляется 4-инверсия только при преобразовании волновых функций из K_- в K_+ и наоборот.

Простейшими решениями уравнений (89)-(90) являются плоские волны:

$$\psi^r_- = u^r_-(p_{(-)})\exp(-ip_{\mu-}x^\mu_- / \hbar). \tag{96}$$

Биспиноры $u^r_-(p_0, \mathbf{p})$ сначала находят в системе покоя K'_-, которая сопутствует частице и также идёт в обратном во времени направлении по сравнению с K_+. В этой системе $u^r_-(mc, 0)$ и волновые функции имеют тот же вид, что и в (79)-(80), но с заменой $t \to t_-$.

Затем, произведя преобразования Лоренца согласно (73)-(76) над волновой функцией в сопутствующей частице системе отсчёта K'_-, найдём её вид и в инерциальной системе K_-, где эта частица движется. Биспиноры $u^r(p)$ в результате принимают вид (96), где $u^r_-(p_{(-)})$ имеет вид (81), но с заменой импульсов $p \to p_{(-)}$. Одинаковый вид волновых функций в двух системах отсчёта K_+ и K_- выражает симметрию между частицами двух знаков энергии.

Далее, для описания взаимодействий частиц обеих знаков энергии необходимо рассматривать их в одной и той же системе отсчёта, в качестве которой естественно выбрать K_+. Поэтому следующим шагом является перевод волновых функций ψ_- в координатах K_- в координаты K_+. Для этого произведём 4-инверсию согласно (88), (91)-(93), изменив также знак 4-импульса $p^\mu_{(-)} \to -p^\mu$. При этом две части волновой функции с разными знаками энергии записываются для одной и той же мировой точки и поэтому произведение $-ip_{\mu-}x^\mu_-$ переходит в $ip_\mu x^\mu$. В результате получаем:

$$\gamma^5\psi_-(x_-) = \psi_-(x_+) = v^r(-p)\exp(ip_\mu x^\mu / \hbar). \tag{97}$$

Для наглядности приведём преобразование спинорной части волновой функции:

$$\gamma^5 u^1_-(p_{(-)}) = \sqrt{\frac{\tilde{p}}{2mc}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -p_z/\tilde{p} \\ -p_+/\tilde{p} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\tilde{p}}{2mc}}\begin{pmatrix} -p_z/\tilde{p} \\ -p_+/\tilde{p} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v^1(-p), \tag{98}$$

$$\gamma^5 u^2_-(p_{(-)}) = \sqrt{\frac{\tilde{p}}{2mc}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -p_-/\tilde{p} \\ p_z/\tilde{p} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\tilde{p}}{2mc}}\begin{pmatrix} -p_-/\tilde{p} \\ p_z/\tilde{p} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v^2(-p). \tag{99}$$

При 4-инверсии скаляр $\bar{\psi}^r_-(x_-)\psi^{r'}_-(x_-)$ не должен меняться, тогда как 4-вектор $\bar{\psi}^r_-(x_-)\gamma^\mu\psi^{r'}_-(x_-)$ должен изменить знак. Однако, преобразования Лоренца биспиноров не унитарные и поэтому в эти билинейные формы входит не эрмитово-сопряжённый, а дираковски-сопряжённый биспинор. При 4-инверсии это ведёт к дополнительному изменению знака и в результате получаются выражения с обратными знаками по сравнению с ожидаемыми:

$$u_-^{r+}(p_{(-)})\gamma^5\gamma^0\gamma^5 u_-^{r'}(p_{(-)}) = -\bar{v}^{r'}(-p)v^r(-p), \tag{100}$$

$$u_-^{r+}(p_{(-)})\gamma^5\gamma^5 u_-^{r'}(p_{(-)}) = v^{r'+}(-p)v^r(-p). \tag{101}$$

Как видим, у скаляра знак меняется, тогда как у компоненты вектора знак не меняется.

Для исправления этого недостатка и восстановления нормальных свойств скаляров и векторов при 4-инверсии надо вернуться к общему определению среднего от оператора A, не зависящего от конкретного соглашения о нормировке:

$$\langle A\rangle = \frac{\bar{\psi}A\psi}{\bar{\psi}\psi}. \tag{102}$$

При таком более строгом определении средних, выражения для билинейных форм биспиноров принимают тот вид, который требуется их свойствами при 4-инверсии:

$$\frac{\bar{\psi}_-^r\psi_-^{r'}}{\bar{\psi}_-^r\psi_-^{r'}} \to \frac{\bar{v}^r\gamma^0 v^{r'}}{\bar{v}^r v^{r'}} = \delta^{rr'}. \tag{103}$$

$$\frac{\bar{\psi}_-^r\gamma^0\psi_-^{r'}}{\bar{\psi}_-^r\psi_-^{r'}} \to \frac{\bar{v}^r\gamma^0 v^{r'}}{\bar{v}^r v^{r'}} = -\frac{E}{mc^2}\delta^{rr'}. \tag{104}$$

Таким образом, в K_+ 4-компонента плотности потока вероятности для частиц отрицательной энергии, также как и в случае бозонов, является отрицательно-определённой $j_-^0 \le 0$.

4.4. Волновые уравнения для спиноров и нерелятивистский предел

Волновая функция может быть представлена в виде биспинора, составленного из двух спиноров φ и χ:

$$\psi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}, \tag{105}$$

после чего (45) перейдёт в систему из двух спинорных уравнений:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -i\hbar\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\chi + mc^2\varphi, \tag{106}$$

$$-i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = -i\hbar\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\varphi + mc^2\chi. \tag{107}$$

В этом представлении плотность потока вероятности принимает вид:

$$j^0 = c\tilde{\psi}\gamma^0\psi = c(\varphi^+\varphi - \chi^+\chi). \tag{108}$$

Здесь отрицательный знак второго члена выражает обратное направление потока вероятности по оси времени для вклада состояний отрицательной энергии, который возникает при преобразованиях Лоренца.

В волновых уравнениях (71) обычно рассматривается нерелятивистский предел состояний положительной энергии. Здесь же рассмотрим этот предел для состояний обеих знаков энергии.

В нерелятивистском предел кинетическая энергия частицы $\tilde{E}_p = E_p - mc^2$ мала по сравнению с энергией покоя $\tilde{E}_p \ll mc^2$. Поэтому в зависимости от времени волновой функции $\psi(x)$ часть зависящая от mc^2 быстро осциллирует и эту часть можно отделить от медленно меняющейся части. Для этого в $\psi(x)$ выделим две компоненты $\psi_\pm$, соответствующие состояниям разного знака энергии:

$$\psi_+ = \tilde{\psi}_+ \exp\left(-\frac{imc^2}{\hbar}t\right), \quad \psi_- = \tilde{\psi}_- \exp\left(\frac{imc^2}{\hbar}t\right). \tag{109}$$

Здесь $\tilde{\psi}_\pm$ - их медленно меняющиеся части волновой функции, для которых:

$$\left| i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}_\pm}{\partial t} \right| \approx \tilde{E}_p \tilde{\psi}_\pm \ll mc^2 \tilde{\psi}_\pm \tag{110}$$

Производные по времени $\psi_\pm$ тогда равны:

$$\frac{\partial \psi_\pm}{\partial t} = \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_\pm}{\partial t} \mp \frac{imc^2}{\hbar} \tilde{\psi}_\pm \right) \exp\left(\mp \frac{imc^2}{\hbar}t\right) \approx \mp \frac{imc^2}{\hbar} \tilde{\psi}_\pm \exp\left(\mp \frac{imc^2}{\hbar}t\right) \tag{111}$$

Подстановка их в волновые уравнения (71) даёт два уравнения Шрёдингера для состояний двух знаков энергии:

$$\pm i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}_\pm}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \tilde{\psi}_\pm \tag{112}$$

Для покоящейся свободной частицы нет кинетической энергии и волновые уравнения (106)-(107) и их решения предельно упрощаются:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = mc^2 \varphi, \quad \varphi(t) = a \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t\right), \tag{113}$$

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = -mc^2 \chi, \quad \chi(t) = a \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} mc^2 t\right). \tag{114}$$

Поэтому в нерелятивистском приближении для движущейся частицы имеем:

$$\varphi = \tilde{\varphi} \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t\right), \quad \chi = \tilde{\chi} \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} mc^2 t\right), \tag{115}$$

где $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\chi}$ - медленно меняющиеся части спиноров. Из (106)-(107) тогда следуют:

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \tilde{\varphi} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \tilde{\chi} \cdot \exp\left(\frac{2i}{\hbar} mc^2 t\right), \tag{116}$$

$$-i\hbar \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \tilde{\chi} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \tilde{\varphi} \cdot \exp\left(-\frac{2i}{\hbar} mc^2 t\right). \tag{117}$$

В этих уравнениях в нерелятивистской области производится усреднение по времени в интервале $\Delta t_{усред}$, достаточно малом по сравнению с периодами изучаемых процессов, но достаточно большом по сравнению с комптоновским периодом для частицы: $\hbar / \tilde{E}_p \gg \Delta t_{усред} \gg \hbar / mc^2$. Тогда осциллирующие экспоненты в (68)-(69)

дают практически исчезающий вклад и уравнения переходят в два уравнения Шрёдингера, описывающие частицы двух знаков энергии:

$$i\hbar\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\tilde{\varphi},\quad -i\hbar\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\tilde{\chi}. \tag{118}$$

4.5. Причинные пропагаторы частиц

Причинный пропагатор $G_c(x'-x)$, есть амплитуда вероятности перехода скалярной частицы из начального события x в конечное событие x' и удовлетворяет уравнению КГ с точечным источником:

$$(\hbar^2\partial^\mu\partial_\mu+m^2c^2)G_c(x'-x)=-\delta^4(x'-x). \tag{119}$$

Решение этого уравнения в импульсном представлении даёт выражение для импульсного представления пропагатора, удовлетворяющего граничным условиям ВСТ:

$$G_c(x'-x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x'-x)}}{p^2-m^2c^2+i\varepsilon}. \tag{120}$$

Этот пропагатор даёт отличные от нуля вероятности перехода при $t'>t$ лишь для частиц положительной энергии, а при $t'<t$ лишь для частиц отрицательной энергии.

Причинный пропагатор $S_c(x'-x)$ для частицы спина ½ удовлетворяет уравнению Дирака с точечным источником:

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu-mc)S_c(x'-x)=\delta^4(x'-x). \tag{121}$$

Решение этого уравнения с граничными условиями ЗШФ в импульсном представление имеет вид:

$$S_c(x'-x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\gamma^\mu p_\mu+mc}{p^2-m^2c^2+i\varepsilon}e^{-ip(x'-x)}. \tag{122}$$

Этот пропагатор даёт отличные от нуля вероятности перехода при $t'>t$ лишь для частиц положительной энергии, а при $t'<t$ лишь для частиц отрицательной энергии.

В квантовой теории поля только с физическими состояниями положительной энергии использование этих выражений для пропагаторов, содержащих полюса при отрицательных p_0, считалось чисто формальным приёмом. В ВСТ же присутствие такого полюса является естественным и не вызывает каких-либо противоречий.

В ВСТ включение взаимодействий, в частности, электромагнитного поля, а также формулировка диаграммной техники, производится в конечном итоге также, как и в стандартных курсах релятивистской квантовой механики [4,5].

5. Заключение

ВСТ, основанная на интерпретации ЗШФ и его обобщении, принципе эквивалентности физики частиц, включает в себя частицы обоих знаков энергии, движущиеся во взаимно противоположных направлениях оси времени обычной инерциальной системы K_+, где частицы отрицательной энергии являются ковариантным способом описания явлений с античастицами.

В ВСТ не только частицы отрицательной энергии движутся назад в обычном времени K_+, но и их системы покоя K_- также движутся назад в этом времени. Это приводит к соответствующему расширению группы Пуанкаре. Связь двух классов преобразований для двух направлений временной эволюции осуществляется посредством 4-инверсии PT .

При этом, ввиду отсутствия в ВСТ античастиц, операция инверсии оси времени T является объединением прежних операций вигнеровского обращения времени T_W и зарядового сопряжения C .

Интегрирование по времени в функции действия также идёт в обеих направлениях времени. Запись всех интегралов по времени через интегралы вперёд во времени делает формулы более компактными.

В ВСТ нет проблем с вероятностной интерпретацией волновых функций как скалярной частицы, так и фермионов, в теории которых внесены необходимые коррективы, делающие их физически последовательными. ВСТ также естественным образом приводит к стандартным причинным пропагаторам частиц.

Поскольку прежние физические теории стали основой физической картины мира и широко применялись для практических целей задолго до открытия античастиц, то появление и успехи интерпретации ЗШФ не повлияли ни на изложение их формализма в стандартных учебниках, ни на их использование в научной литературе. Формулировка ВСТ приведёт к возникновению нового поколения научной и учебной литературы, содержащей изложений более последовательной и состоятельной с физической точки зрения описания явлений в системах с античастицами.

Литература

1. Зисман Г. (1940) ЖЭТФ **10** 1163; (1941) **11** 631; *Теория античаст*. (дисс. сент. 1941) 66 с.
2. Stueckelberg E. (1941) *Helv. Phys. Acta* **14**, 588.
3. Feynman R. (1949) *Phys. Rev*. **76**, 749.
4. Бьёркен Дж., Дрелл С. (1978) *Релятивистская квантовая теория*. т. 1. М.
5. Greiner W., Muller B., Rafelski J. (1985) *QED of Strong Fields*. Springer.
6. Закир З. (2023) *Квант. и грав. физ.* **4**:023-8181, **4**:024-8278.
7. Закир З. (2024) *Конечная квантовая теория поля*. ЦТФА, Т.
8. Зисман Г., Тодес О. (1970) Курс общей физики. т. 3, Наука, М.
9. Ландау Л., Лифшиц Е. (1988) *Теория поля*. М.
10. Feshbach H., Villars F. (1958) *Rev. Mod. Phys*. **30**, 24.