КВАНТОВАЯ И ГРАВИТАЦИОННАЯ ФИЗИКА ISSN 2181-0478; EISSN 2181-0494
3:019, 14 с., 15.03.2022; doi:10.9751/KGF.3-019.7744

Последовательное квантование систем с положительно- и отрицательно-энергетическими состояниями

Захид Закир [1]

Аннотация

Трактовка Штюкельберга-Фейнмана (ШФ), где античастицы с положительной энергией описываются как частицы с отрицательной энергией, движущиеся назад во времени, лежит в основе физики частиц, но не согласуется с квантовой теорией поля, поскольку приводит к отрицательной норме для состояний с отрицательной энергией. В статье представлен новый последовательный метод канонического квантования в трактовке ШФ, где нормы всех состояний положительны, поскольку изменение направления интегрирования по времени в функции действия меняет знак лагранжиана античастиц и импульса. Минимальные лагранжианы для комплексных канонических переменных не приводят к нулевой энергии, что частично решает проблему космологической постоянной. Причинные пропагаторы и амплитуды появляются как симметричные хронологические произведения операторов поля, что немного изменяет диаграммную технику. Приведены модифицированные условия микропричинности и доказательства теоремы о спине и статистике, обсуждаются приложения к физике частиц и конденсированным средам.

Ключевые слова: Квантование, нулевая энергия, диаграммная техника, Стандартная Модель, космологическая постоянная

Содержание

[1] *Центр теоретической физики и астрофизики,Ташкент Узбекистан*, zzakir@qgph.org, ORCID

1. Введение

Релятивистская квантовая теория в ковариантной форме содержит частицы с отрицательной энергией, которые в трактовке Штюкельберга-Фейнмана (ШФ) [1,2] (см. [3]) эволюционируют только назад во времени и описывают античастицы с положительной энергией, эволюционирующие только вперёд во времени. Однако до сих пор трактовка ШФ не была совместима с квантовой теорией поля (КТП), поскольку в каноническом формализме отрицательные энергии приводили к отрицательной норме состояний. Гипотеза Дирака об индефинитной метрике (детали см. в [4]), требующая пересмотра основ квантовой механики, не может рассматриваться как реальное решение.

Такая неясная ситуация привела к стандартной форме КТП с частицами и античастицами только положительной энергии (см. [5]). Это было сделано путём замены в полевых операторах операторов рождения (уничтожения) частиц с отрицательной энергией на операторы уничтожения (рождения) античастиц с положительной энергией: $a_{-k}^{+} \to b_k$ ($a_{-k} \to b_k^{+}$). Однако в произведениях операторов поля этот анзац приводил к расходящейся нулевой энергии, даже когда она отсутствовала для состояний с отрицательной энергией. Хотя рецепт нормального упорядочения позволял обойти проблему нулевой энергии в физике частиц, наличие гравитации приводило к проблеме космологической постоянной.

Одним из способов решения этой проблемы было возвращение к описанию, включающему состояния с отрицательной энергией. Решение проблемы отрицательной нормы в каноническом квантовании было найдено М. Павшичем в 1998 г. [6]. Было показано, что лагранжиан с двумя знаками и соответствующие им импульсы делают нормы всех состояний положительными. Но в [6] физический смысл состояний с отрицательной энергией оставался открытым.

Недавно был сформулирован новый последовательный метод квантования систем, имеющих состояния с двумя знаками энергии [7], дополняющий метод [6] трактовкой состояний с отрицательной энергией согласно ШФ. В данной статье кратко описывается этот метод квантования, а затем рассматриваются его новые приложения, в том числе для взаимодействующих полей. Более детальное изложение будет дано в книге [8].

Поскольку состояния с отрицательной энергией эволюционируют в обратном направлении времени, это свойство учитывается с самого начала. В функции действия изменение направления интегрирования по времени меняет знак лагранжиана и канонического импульса, а затем этот факт делает норму состояний положительной. Таким образом, трактовка ШФ становится совместимой с КТП.

В разделе 2 последовательная форма трактовки ШФ применяется к гармоническим осцилляторам. В разделах 3-5 она применяется к квантовой электродинамике, включая взаимодействующие поля. В разделе 6 обсуждаются различные приложения нового метода (калибровочные поля, гравитация, генерация массы, струны, сплошные среды).

2. Квантование состояний с положительной и отрицательной энергией в трактовке ШФ

2.1. Трактовка ШФ состояний с отрицательной энергией

В стандартной КТП, имеющей дело с частицами и античастицами положительной энергии, движущимися только вперёд во времени ($t_1 > t_0$), направление интегрирования по времени в функции действия должно быть зафиксировано ступенчатой функцией:

$$S(t_1,t_0)=\theta(t_1-t_0)\int_{t_0}^{t_1} L_+dt+\theta(t_1-t_0)\int_{t_0}^{t_1} L_{a+}dt\,, \tag{1}$$

где $L_+(q_+,\dot{q}_+)$ и $L_{a+}(q_{a+},\dot{q}_{a+})$ - лагранжианы частиц и античастиц соответственно.

В КТП этот подход приводит к *нековариантной* диаграммной технике с гораздо бóльшим количеством диаграмм, чем в ковариантной диаграммной технике, из-за запрета интегрирования назад во времени для состояний с положительной энергией. Формальный трюк с помощью интегрального представления для ступенчатой функции может преобразовать матричные элементы к той же форме, что и в технике ковариантных диаграмм с 4-импульсом p_μ, но тогда появляются кванты, формально имеющие отрицательную «энергию» $-|p_0|$. Таким образом, ковариантная форма стандартной КТП неизбежно требует иметь дело с состояниями с «отрицательной энергией», но это может быть сделано последовательно только в рамках трактовки ШФ. Как такие состояния могут быть описаны в КТП без внутренних противоречий, будет показано ниже.

Правильный переход к трактовке ШФ требует следующих операций во втором интеграле уравнения (1):

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} L_{a+}dt=-\int_{t_0+\Delta t}^{t_0} L_{a+}dt=\int_{t_0}^{t_0-\Delta t}(-L_{a+})dt=\int_{t_0}^{t_0-\Delta t} L_{-}dt; \tag{2}$$

т.е.

1) положив $t_1=t_0+\Delta t$, $\Delta t>0$, меняем местами пределы интегрирования, изменив знак интеграла,
2) используя трансляционную симметрию, смещаем пределы интеграла вниз на Δt,
3) вводим лагранжиан с отрицательной энергией $L_-(q_-,\dot{q}_-)=-L_{a+}(q_{a+},\dot{q}_{a+})$.

И, наконец, выполняем четвертую операцию:

4) аналогичным образом меняем вторую ступенчатую функцию в (1) и затем пере-обозначаем $t_1\to t_0-\Delta t$:

$$\theta(t_1-t_0)=\theta[(t_0+\Delta t)-t_0]=\theta[t_0-(t_0-\Delta t)]\to\theta(t_0-t_1). \tag{3}$$

В результате шагов (1) - (4) функция действия $S(t_1,t_0)=S_++S_-$ принимает вид:

$$S(t_1,t_0)=\theta(t_1-t_0)\int_{t_0}^{t_1} L_+dt+\theta(t_0-t_1)\int_{t_0}^{t_1} L_-dt. \tag{4}$$

Здесь первый член с положительно-определённым лагранжианом L_+ описывает эволюцию вперёд во времени ($t_1>t_0$), а второй член с отрицательно-определённым лагранжианом L_- описывает эволюцию назад во времени ($t_1<t_0$), как того требует метод ШФ.

Для релятивистских частиц лагранжианы имеют вид $L_\pm=\mp m(1-\mathbf{v}_\pm^2)^{1/2}$. Отметим, что инверсия пространства-времени $x_+^\mu\to -x_-^\mu$, $p_{\mu+}\to -p_{\mu-}$ используемая в трактовке ШФ, меняет знак 4-импульса, но не меняет знак 4-

скорости u_μ и $p_{\mu\pm} \to \pm m u_{\mu\pm}$. Важно то, что знак лагранжиана меняется не из-за зависимости от переменных, а из-за знака интеграла по времени в (4). Это отличает нынешнюю последовательную формулировку трактовки ШФ от других.

Здесь важно то, что формулировка моделей физики частиц в трактовке ШФ связана с описанием экспериментальных данных непосредственно и не требует переформулирования в терминах античастиц. Достаточно знать, что начальное состояние частицы с отрицательной энергией с $-p_\mu$ представляет собой конечное состояние античастицы с $+p_\mu$, и это хорошо известная перекрёстная (кроссинг) симметрия, одна из основных симметрий физики частиц.

2.2. Гармонические осцилляторы с состояниями отрицательной энергии

В трактовке ШФ система двух гармонических осцилляторов с координатами $x_\pm$, соответствующими состояниям двух знаков энергии, описывает частицу и античастицу в гармоническом потенциале. Канонический формализм даёт ($\dot{x}_\pm = dx_\pm / dt$):

$$L_\pm = \pm\frac{m}{2}(\dot{x}_\pm^2 - \omega^2 x_\pm^2), \quad H_\pm = \pm\frac{1}{2m}[p_\pm^2 + (m\omega)^2 x_\pm^2],$$
$$p_\pm = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\pm} = \pm m\dot{x}_\pm, \quad \dot{p}_\pm = -\frac{\partial H_\pm}{\partial x_\pm} = \mp m\omega^2 x_\pm. \tag{5}$$

Уравнения движения $\ddot{x}_\pm + \omega^2 x_\pm = 0$ имеют решения:

$$x_+ = (2m\omega)^{-1/2}(a_+ e^{-i\omega t} + a_+^* e^{i\omega t}), \qquad x_- = (2m\omega)^{-1/2}(a_- e^{i\omega t} + a_-^* e^{-i\omega t}) \tag{6}$$

$$p_+ = -i(m\omega/2)^{1/2}(a_+ e^{-i\omega t} - a_+^* e^{i\omega t}), \qquad p_- = -i(m\omega/2)^{1/2}(a_- e^{i\omega t} - a_-^* e^{-i\omega t}) \tag{7}$$

Квантование даёт коммутаторы:

$$[x_\pm, p_\pm] = i, \quad [a_\pm, a_\pm^*] = 1. \tag{8}$$

Отметим, что в прежних подходах импульс p_-, из-за положительно-определённого гамильтониана H_-, имел вид $p_- = m\dot{x}_-$, что приводило к отрицательно-определённым коммутатору $[a_-, a_-^*] = -1$ и норме состояний: $\langle 1_- | 1_- \rangle = \langle 0 | a_- a_-^* | 0 \rangle = -1$.

В данной же трактовке p_- в (5) содержит отрицательный знак $p_- = -m\dot{x}_-$, что обеспечивает положительный знак коммутатора $[a_-, a_-^*] = +1$ и положительную норму состояний. Основные состояния определены как $a_\pm |0\rangle = 0$, что приводит к положительной норме одночастичных состояний [6]:

$$\langle 1_\pm | 1_\pm \rangle = \langle 0 | a_\pm a_\pm^* | 0 \rangle = \langle 0 | [a_\pm, a_\pm^*] | 0 \rangle = 1. \tag{9}$$

Уравнение (8) даёт для волновых функций основного состояния $\psi_{0\pm}$:

$$(m\omega x_\pm + \partial_{x_\pm})\psi_{0\pm} = 0, \quad \psi_{0\pm} = (m\omega/\pi)^{1/4}\exp(-m\omega x_\pm^2/2), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{0\pm}^2 dx_\pm = 1. \tag{10}$$

Таким образом, гамильтонианы (5) в терминах $a_\pm, a_\pm^*$ принимают вид:

$$H_\pm = \pm\frac{\omega}{2}(a_\pm^* a_\pm + a_\pm a_\pm^*) = \pm\omega(a_\pm^* a_\pm + 1/2). \tag{11}$$

В терминах анти-квантов положительной энергии $H_- \to H_{a+} = \omega(a_{a+}^* a_{a+} + 1/2)$, полный гамильтониан есть $H = \omega(a_+^* a_+ + a_{a+}^* a_{a+} + 1)$, т.е. нулевая энергия положительно-энергетических анти-квантов удваивает полную нулевую энергию.

При переходе к трактовке ШФ с состояниями с отрицательной энергией функция действия остаётся неизменной и нулевые энергии обеих мод суммируются, удваивая энергию основного состояния. Это связано с тем, что в полной функции действия подынтегральные выражения можно суммировать только после сведения к одним и тем же пределам интегрирования по времени, и, тем самым, оба описания, с анти-квантами или с квантами отрицательной энергии, дают один и тот же результат.

Отметим, что во многих попытках исключить нулевые энергии двух типов квантов (см. [4,6] и другие) требовалось наличие квантов отрицательной энергии, движущихся вперёд во времени, которые являются нефизическими и запрещены трактовкой ШФ.

Таким образом, при квантовании в трактовке ШФ гармонического осциллятора, содержащего состояния с отрицательной энергией, последние имеют положительную норму и теория последовательна.

2.3. Гармонический осциллятор с комплексными координатами и состояниями с отрицательной энергией

Рассмотрим гармонический осциллятор с комплексными координатами $q_\pm$, $q_\pm^*$, содержащий состояния с отрицательной энергией. В общем случае лагранжиан включает симметризованные произведения комплексно сопряжённых координат и скоростей $(q_\pm^* q_\pm + q_\pm q_\pm^*)/2$, $(\dot q_\pm^* \dot q_\pm + \dot q_\pm \dot q_\pm^*)/2$. Однако мы можем выбрать лагранжианы и соответствующие гамильтонианы и в минимальном виде, без такой симметризации:

$$L_\pm = \pm m(\dot q_\pm^* \dot q_\pm - \omega^2 q_\pm^* q_\pm), \quad H_\pm = \pm\frac{1}{m}(p_\pm p_\pm^* + m^2\omega^2 q_\pm^* q_\pm), \tag{12}$$

где $p_\pm = \partial L_\pm / \partial \dot q_\pm = \pm m \dot q_\pm^*$, $p_\pm^* = \partial L_\pm / \partial \dot q_\pm^* = \pm m \dot q_\pm$. Здесь отрицательные знаки p_- и p_-^* делают положительными коммутатор $[a_-, a_-^*]$ и норму состояний. Уравнения движения $\dot p_\pm = \partial L_\pm / \partial q_\pm$, $\dot p_\pm^* = \partial L_\pm / \partial q_\pm^*$, или $\ddot q_\pm + \omega^2 q_\pm = 0$, $\ddot q_\pm^* + \omega^2 q_\pm^* = 0$ дают:

$$q = (2m\omega)^{-1/2}(a_+ e^{-i\omega t} + a_- e^{i\omega t}), \quad q^* = (2m\omega)^{-1/2}(a_+^* e^{i\omega t} + a_-^* e^{-i\omega t}), \tag{13}$$

$$p = i(m\omega/2)^{1/2}(a_+^* e^{i\omega t} + a_-^* e^{-i\omega t}), \quad p^* = -i(m\omega/2)^{1/2}(a_+ e^{-i\omega t} + a_- e^{i\omega t}). \tag{14}$$

Здесь $q = q_+ + q_-$, $p = p_+ + p_- = m(\dot q_+^* - \dot q_-^*) = im\omega q^*$, и

$$a_\pm = (2m\omega)^{-1/2}(m\omega q_\pm + ip_\pm^*)e^{\pm i\omega t}, \qquad a_\pm^* = (2m\omega)^{-1/2}(m\omega q_\pm^* - ip_\pm)e^{\mp i\omega t}. \tag{15}$$

Квантование даёт коммутаторы:

$$[q, p] = i, \quad [q^*, p^*] = i, \quad [a_\pm, a_\pm^*] = 1. \tag{16}$$

Здесь комплексно сопряжённые координаты q и q^* не коммутируют: $[q,q^*]=(m\omega)^{-1}$, как и импульсы $[p^*,p]=m\omega$, но вещественные произведения этих комплексных переменных, которые являются наблюдаемыми, коммутируют.

Основные состояния определяются как $a_\pm\left|0_\pm\right\rangle=0$ и:

$$a_\pm^*\left|n_\pm\right\rangle=\sqrt{n_\pm+1}\left|n_\pm+1\right\rangle,\ \ a_\pm\left|n_\pm\right\rangle=\sqrt{n_\pm}\left|n_\pm-1\right\rangle,\quad n_\pm=0,1,... \tag{17}$$

Полный гамильтониан H и оператор числа квантов N имеют вид:

$$H=H_++H_-=\omega(a_+^*a_+-a_-^*a_-),\ \ N=a_+^*a_++a_-^*a_-. \tag{18}$$

Факт отсутствия нулевой энергии в (18) не меняется и при переходе к анти-квантам, так как $\left|\left\langle 0_-\right|H_-\left|0_-\right\rangle\right|=\left\langle 0_{a+}\right|H_{a+}\left|0_{a+}\right\rangle$.

Таким образом, теория комплексного гармонического осциллятора, содержащего состояния с отрицательной энергией, последовательна и согласуется с трактовкой ШФ, а минимальные лагранжианы (12) приводят к гамильтониану (18) без нулевой энергии.

3. Последовательное квантование в трактовке ШФ полей фотонов и фермионов

3.1. Поле фотонов

В калибровке $\partial_\mu A_\pm^\mu=0$ лагранжианы поля фотонов $A_\pm^\mu$ положительной и отрицательной энергии ($k^0=\pm\omega_{\mathbf{k}}$) имеют вид ($F_\pm^{\mu\nu}=\partial^\mu A_\pm^\nu-\partial^\nu A_\pm^\mu$):

$$L_\pm=\mp\frac{1}{4}\int d^3x\ F_{\mu\nu}^\pm F_\pm^{\mu\nu}=\pm\frac{1}{2}\int d^3x\ \partial_\mu A_\pm^\nu\,\partial^\mu A_{\nu\pm}. \tag{19}$$

При $\mathbf{k}=(0,0,k^3)$ и $A_3=A_0=0$, поперечные физические компоненты образуют комплексное поле $A=(A_1+iA_2)/\sqrt{2}$, $A^*=(A_1-iA_2)/\sqrt{2}$. Лагранжиан (19) в минимальной форме и соответствующий гамильтониан принимают вид, аналогичный случаю комплексного скалярного поля:

$$L_\pm=\pm\int d^3x\,\partial_\mu A_\pm^*\partial^\mu A_\pm,\quad H_\pm=\pm\int d^3x(\pi_\pm\pi_\pm^*+\nabla A_\pm^*\nabla A_\pm). \tag{20}$$

Здесь $\pi_\pm(x)=\pm\partial_t A_\pm^*$, $\pi_\pm^*(x)=\pm\partial_t A_\pm$ и A описывают циркулярно-поляризованные фотоны, которые диагонализирует гамильтониан и спиральность:

$$\Lambda_\pm^0=\pm i\int d^3x\,(A_\pm^*\pi_\pm^*-\pi_\pm A_\pm). \tag{21}$$

Последний фактически является киральным зарядом, а фотоны с $\Lambda^0=\pm1$ подобны частице и зарядово-сопряжённой античастице.

Уравнения поля $\partial_\mu\partial^\mu A=0$, $\partial_\mu\partial^\mu A^*=0$ дают:

$$A=\sum_k(a_k e^{-ikx}+a_{-k}e^{ikx}),\ \ \pi=i\sum_k\omega_k(a_k^*e^{ikx}+a_{-k}^*e^{-ikx}), \tag{22}$$

где $\sum_k = \int d^3k[(2\pi)^3 2\omega_k]^{-1/2}$, $a^*_{\pm k}, a_{\pm k}$ являются операторами рождения-уничтожения для $\Lambda^0_+ = +1$. Для коммутаторов и наблюдаемых это даёт:

$$[A(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{x}',t)] = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),\quad [a_{\pm k}, a^*_{\pm k'}] = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \tag{23}$$

$$H = \int d^3k\, \omega_k (a^*_k a_k - a^*_{-k} a_{-k}),\quad \Lambda^0 = \int d^3k (a^*_k a_k + a^*_{-k} a_{-k}). \tag{24}$$

Основные состояния, определённые как $a_{\pm k}\left|0\right\rangle = 0$, не содержат нулевой энергии и спиральность. Из-за инвариантности вакуума обращение его энергии в нуль в одной из систем отсчёта и в одной из калибровок верно для всех систем и калибровок.

Поле фотонов, имеющее две поперечные физические компоненты $(0, A_1, A_2, 0)$ в данной системе отсчёта, может иметь в других системах отсчёта все четыре составляющие $A_\mu = e^1_\mu A_1 + e^2_\mu A_2$ и вектор поляризации ε_μ, где тетрады (e^1_μ, e^2_μ) являются постоянными кинематическими факторами.

3.2. Фермионное поле

Трактовка ШФ естественна для фермионов со спином 1/2, где поле Дирака ψ включает как спинор $\psi^\alpha_+ \sim u^\alpha_p$ с положительной энергией, так и спинор $\psi^\alpha_- \sim v^\alpha_p$ с отрицательной энергией. В лагранжиане L_- в (4) нет нужды в дополнительном знаке минус, так как этот знак эффективно учтён в условиях нормировки спиноров v^α_p :

$$L_\pm = \int d^3x \left(\frac{i}{2}[\bar\psi_\pm \gamma^\mu (\partial_\mu \psi_\pm) - (\partial_\mu \bar\psi_\pm)\gamma^\mu \psi_\pm] - m\bar\psi_\pm \psi_\pm \right). \tag{25}$$

Соответствующий гамильтониан $H = H_+ + H_-$, оператор заряда $Q = Q_+ + Q_-$ и уравнение Дирака:

$$\begin{aligned} &H_\pm = \frac{i}{2}\int d^3x\, [\psi^+_\pm (\partial_t \psi_\pm) - (\partial_t \psi^+_\pm)\psi_\pm], \qquad Q_\pm = \int d^3x\, \psi^+_\pm \psi_\pm, \\ &\gamma^\mu i\partial_\mu \psi - m\psi = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

ведут к модам (с $E_p = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ и $u^{\alpha+}_p u^{\alpha'}_p = v^{\alpha+}_p v^{\alpha'}_p = \delta^{\alpha\alpha'} E_p / m$):

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_+ + \psi_- = \sqrt{2m}\sum_{\alpha p} (b_{p\alpha} u^\alpha_p e^{-ipx} + b_{-p\alpha} v^\alpha_p e^{ipx}), \\ \psi^+(x) &= \psi^+_+ + \psi^+_- = \sqrt{2m}\sum_{\alpha p} (b^+_{p\alpha} u^{\alpha+}_p e^{ipx} + b^+_{-p\alpha} v^{\alpha+}_p e^{-ipx}). \end{aligned} \tag{27}$$

Волновые функции фермионов должны быть антисимметричными, вследствие чего полевые операторы должны быть антикоммутирующими. При перестановке полевых операторов в коммутаторах их произведение меняет знак и коммутатор превращается в антикоммутатор. В результате этого поле фермионов квантуется одновременными антикоммутаторами ($\pi = i\psi^+$):

$$\left\{\psi^{\alpha}(\mathbf{x},t),\pi^{+\alpha'}(\mathbf{x}',t)\right\}=i\left\{\psi^{\alpha}(\mathbf{x},t),\psi^{+\alpha'}(\mathbf{x}',t)\right\}=i\delta^{3}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta^{\alpha\alpha'},$$
$$\left\{b_{\pm p\alpha},b^{+}_{\pm p'\alpha'}\right\}=\delta^{3}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{\alpha\alpha'}. \quad (28)$$

Выражения (26)-(27) дают для наблюдаемых:

$$H=\sum_{\alpha}\int d^{3}p\,(b^{+}_{p\alpha}b_{p\alpha}-b^{+}_{-p\alpha}b_{-p\alpha})E_{p}, \quad Q=\sum_{\alpha}\int d^{3}p\,(b^{+}_{p\alpha}b_{p\alpha}+b^{+}_{-p\alpha}b_{-p\alpha}). \quad (29)$$

Таким образом, фермионные основные состояния, определённые как $b_{\pm p\alpha}\left|0\right\rangle=0$, не содержат нулевой энергии и нулевого заряда.

В стандартной трактовке КТП в теории Дирака появлялась нулевая энергия, причём с отрицательным знаком. Однако на самом деле это был результатом неаккуратного перехода к картине античастиц. Сначала в (27) член $b_{-p\alpha}v^{\alpha}_{p}$ заменялся на $d^{+}_{p\alpha}v^{\alpha}_{p}$ и античастицы с положительной энергией, которые следовало описывать спинором u^{α}_{p}, продолжали описывать v^{α}_{p}, спинором с отрицательной энергией. Во-вторых, следовало учитывать, что начальное состояние частицы с отрицательной энергией является конечным состоянием античастицы с положительной энергией:

$$\left\langle n_{-}-1\right|b_{-p\alpha}\left|n_{-}\right\rangle=\left\langle n_{a+}\right|d^{+}_{p\alpha}\left|n_{a+}-1\right\rangle, \quad \left\langle n_{-}\right|b^{+}_{-p\alpha}\left|n_{-}-1\right\rangle=\left\langle n_{a+}-1\right|d_{p\alpha}\left|n_{a+}\right\rangle. \quad (30)$$

4. Коммутаторы и пропагаторы, микропричинность и теорема связи спинова и статистики

4.1. Коммутаторы полей и модифицированное условие микропричинности

Комплексное скалярное поле $\phi=\phi_{+}+\phi_{-}$ имеет моды, аналогичные (22), и его коммутаторы не обращаются в нуль на пространственноподобных интервалах:

$$[\phi_{\pm}(x'),\phi^{*}_{\pm}(x)]=\sum_{k}e^{\mp ik(x'-x)}=D_{\mp}(x'-x). \quad (31)$$

В действительности, единственное условие микропричинности, вытекающее из квантовомеханической измеримости, состоит в том, что коммутатор комплексного скалярного поля $\phi_{\pm}$ и его импульс $\pi_{\pm}=\pm\partial_{t}\phi^{*}_{\pm}$ должны обращаться в нуль при пространственноподобных интервалах и должны быть согласованы с одновременными коммутаторами (23). Прямое вычисление даёт выражение через функцию Паули-Йордана $D(x'-x)$, удовлетворяющее этим требованиям:

$$[\phi(x'),\pi(x)]=i\partial_{t}D(x'-x). \quad (32)$$

Для фермионного поля импульс равен $\pi=i\psi^{+}$, а аналог (32) - это стандартный антикоммутатор, исчезающий на пространственноподобных интервалах:

$$\left\{\psi(x')\bar{\psi}(x)\right\}=-(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m)iD(x'-x). \quad (33)$$

Он согласуется с одновременными антикоммутаторами (28).

Таким образом, при последовательном квантовании в трактовке ШФ условия микропричинности видоизменяются: за световым конусом исчезает не коммутатор комплексно сопряжённых полевых операторов (31), а коммутатор канонически сопряжённых операторов (32). Это полностью соответствует требованиям квантовой механики для наблюдаемых, поскольку в случае комплексных полей наблюдаемые описываются только билинейными произведениями операторов поля. С физической точки зрения это означает, что «координата» и соответствующий «импульс» не могут быть измерены одновременно только тогда, когда они описывают причинно связанные события с времениподобным или светоподобным интервалом между ними.

4.2. Причинные пропагаторы полей

В стандартном хронологическом произведении операторов T_+ операторы положительной энергии располагаются в порядке увеличения времени справа налево:

$$T_+[A_+(t')B_+(t)] = \begin{cases} A_+(t')B_+(t), & t' > t, \\ B_+(t)A_+(t'), & t' < t. \end{cases} \tag{34}$$

В трактовке ШФ появляется также оператор T_-, обратный T_+, то есть определённый как упорядочивающий операторов отрицательной энергии в обратном порядке, когда время уменьшается справа налево:

$$T_-[A_-(t')B_-(t)] = \begin{cases} B_-(t)A_-(t'), & t' > t, \\ A_-(t')B_-(t), & t' < t. \end{cases} \tag{35}$$

Оператор симметричного хронологического упорядочивания $\hat{T}$ может быть определён как их произведение $\hat{T} = T_+T_-$ со свойствами $\hat{T}A_+ = T_+A_+$, $\hat{T}A_- = T_-A_-$. Он избирательно действует на операторы обеих знаков энергии, упорядочивая их в обратном порядке и при $t' > t$ даёт:

$$\hat{T}[A_+(t')B_+(t)A_-(t')B_-(t)] = [A_+(t')B_+(t)][B_-(t)A_-(t')]. \tag{36}$$

В трактовке ШФ причинные пропагаторы ШФ появляются естественно как симметричные хронологические произведения ($\hat{T}$ -произведения):

$$\begin{aligned} iD_c(x'-x) &= \langle 0|\hat{T}[\phi(x')\phi^*(x)]|0\rangle = \\ &= \langle 0|\phi_+(x')\phi_+^*(x)\theta(t'-t) + \phi_-(x')\phi_-^*(x)\theta(t-t')|0\rangle = \\ &= \sum_k \Big[\theta(t'-t)e^{-i\omega_k(t'-t)} + \theta(t-t')e^{i\omega_k(t'-t)}\Big]e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}. \end{aligned} \tag{37}$$

Причинный пропагатор ШФ для фермионов есть:

$$\begin{aligned} iS_c(x'-x) &= \langle 0|\hat{T}[\psi(x')\bar{\psi}(x)]|0\rangle = \\ &= \langle 0|\psi_+(x')\bar{\psi}_+(x)\theta(t'-t) + \psi_-(x')\bar{\psi}_-(x)\theta(t-t')|0\rangle = \\ &= -(i\gamma\,\partial + m)D_c(x'-x). \end{aligned} \tag{38}$$

Таким образом, в трактовке ШФ симметричное по времени произведение $\hat{T}$ заменяет прежние искусственные правила построения причинных пропагаторов.

4.3. Новые аспекты теоремы о спине и статистике

В стандартной КТП доказательство теоремы о спине и статистике основывалось на двух аргументах. Первым было условие положительной энергии для спинорного поля, приводящее к антикоммутаторам, а вторым - условие микропричинности, требующее исчезновения (анти) коммутаторов полевых операторов на пространственноподобных интервалах.

В разделе 3.2 поле со спином 1/2 было проквантовано с помощью антикоммутаторов в предположении, что это поле фермионов. Но здесь антикоммутаторы не исключили отрицательные энергии, и введение антикоммутаторов прямо не связывалось со знаком энергии. Как было показано в разделе 4.1, в трактовке ШФ условия микропричинности становятся слабее, поскольку коммутаторы бозонного поля не обращаются в нуль на пространственноподобных интервалах, также как причинные пропагаторы.

В связи с этим появляются новые аспекты доказательства теоремы о спине и статистике. Доказательство должно основываться на более общих аргументах, поскольку конкретные свойства полевых операторов дают только достаточное условие, но не необходимое условие [8].

5. Взаимодействующие поля и модифицированная диаграммная техника

При квантовании ШФ два типа вкладов в свободный гамильтониан являются аддитивными $H_0 = H_{0+} + H_{0-}$, а зависимость свободного поля φ от времени имеет вид $\varphi_\pm(t) = e^{\mp iH_{0\pm}t}\varphi_\pm(0)e^{\pm iH_{0\pm}t}$. Эволюция во времени взаимодействующих полей описывается с помощью гамильтониана взаимодействия H_I. При аддитивном вкладе взаимодействий с положительной и отрицательной энергиями $H_I = H_{I+} + H_{I-}$ эволюция во времени даётся оператором эволюции:

$$U(t,t_0) = \hat{T}\exp\left(-i\int_{t_0}^{t} dt'[\theta(t_1-t_0)H_{I+}(t') + \theta(t_0-t_1)H_{I-}(t')]\right). \tag{39}$$

где $\hat{T} = T_+T_-$ - симметричный по времени оператор, определённый в (36).

В общем случае имеется смешанная часть вершины взаимодействия $\tilde{H}_{I+}\tilde{H}_{I-}$, приводящая, в частности, к рождению и уничтожению пары, и $H_I = H_{I+} + H_{I-} + \tilde{H}_{I+}\tilde{H}_{I-}$. По этой причине (39) можно записать как общее произведение:

$$U(t,t_0) = \hat{T}\exp\left(-i\int_{t_0}^{t} dt' H_I(t')\right). \tag{40}$$

В теории возмущений S -оператор, определяемый как $\hat{S} = U(\infty,-\infty)$, принимает вид:

$$\hat{S} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 ... \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \hat{T}[H_I(t_1)...H_I(t_n)]. \tag{41}$$

Модифицированная теорема Вика для двухточечной функции имеет вид:

$$\hat{T}[\phi(x')\phi^*(x)] =: \phi(x')\phi^*(x) : + \langle 0|\hat{T}[\phi(x')\phi^*(x)]|0\rangle, \tag{42}$$

где $:A:$ означает нормальное упорядочение. Например, в диаграмме электрон-позитронной петли произведение $\hat{T}[H_I(x')H_I(x)]$ даёт стандартные формулы:

$$\begin{aligned}\hat{T}[H_I(x')H_I(x)] &= T_+[\psi_{j+}(x')\bar{\psi}_{m+}(x)]\gamma_{\mu mn}T_-[\psi_{n-}(x)\bar{\psi}_{i-}(x')]\gamma^{\mu}_{ij} = \\ &= -S_{c+}(x'-x)_{jm}\gamma_{\mu mn}S_{c-}(x-x')_{ni}\gamma^{\mu}_{ij}, \qquad t'>t,\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}\hat{T}[H_I(x')H_I(x)] &= T_-[\psi_{j-}(x')\bar{\psi}_{m-}(x)]\gamma_{\mu mn}T_+[\psi_{n+}(x)\bar{\psi}_{i+}(x')]\gamma^{\mu}_{ij} = \\ &= -S_{c-}(x'-x)_{jm}\gamma_{\mu mn}S_{c+}(x-x')_{ni}\gamma^{\mu}_{ij}, \qquad t'<t.\end{aligned} \tag{44}$$

Для взаимодействующих полей проявляются три отличия между новой формой трактовки ШФ и стандартной диаграммной техникой:

a) вместо античастиц существуют моды с отрицательной энергией, и интегрирование по времени для них идёт в прошлое,
b) хронологический порядок зависит от знака энергии и симметричен во времени,
c) операторы в вершинах не (анти)коммутируют $\phi(x)\phi^*(x) \neq \phi^*(x)\phi(x)$.

Фактически, эти различия были эффективно учтены в стандартной диаграммной технике с помощью некоторых формальных правил (нормальное упорядочение, построение пропагаторов и т. д.) [8]. Это и объясняет то, что прежние результаты в основном совпадают с результатами нового метода.

6. Поля Стандартной модели и некоторые другие применения

6.1. Безмассовые калибровочные поля и гравитоны

Безмассовое неабелево векторное калибровочное поле A^a_μ (спин 1) и поле гравитона (спин 2) имеют две поперечные физические состояния. Здесь имеется аксиальная симметрия, а при круговой поляризации свободный гамильтониан и спиральность диагональны. По этой причине в приближении слабого поля их квантование аналогично случаю фотонного поля. Дальнейший учёт нелинейности и внутренней симметрии этих полей не меняет вывода об отсутствии нулевой энергии. Действительно, их нелинейные вклады пропорциональны константам связи и должны уменьшаться в пределе слабого поля, в то время как нулевая энергия, как энергия флуктуаций свободных полей $\omega_k/2$, не зависит от констант взаимодействия.

В случае гравитонов эффективная константа связи зависит от энергии обрезания петлевых диаграмм Λ как $\sim(\Lambda/\Lambda_g)^n$, $n>2$ и мала вплоть до энергии Планка Λ_g. На планковской длине l_g, где гравитационный радиус частиц близок к их длине волны, для внешних наблюдателей наблюдается сильное гравитационное красное смещение собственных частот. Быстрое уменьшение собственных частот на расстояниях порядка l_g из-за гравитационного застывания собственных времён для внешних наблюдателей приводит к уменьшению вклада нелинейных эффектов в S-матрицу.

Вывод о том, что при квантовании безмассовых неабелевых полей и поля гравитона в одной системе отсчёта, в поперечной калибровке и в пределе слабой связи нулевая энергия не возникает, остаётся в силе для всех систем отсчёта и калибровок из-за инвариантности вакуума [8].

6.2. Новые аспекты механизма генерации массы

В Стандартной модели механизм генерации массы был основан на спонтанном нарушении симметрии в системе из калибровочных полей и дублета двух комплексных скалярных полей (которые сводились к одному вещественному скалярному полю).

В трактовке ШФ частотное разложение исходного комплексного скалярного поля имеет вид $\chi \sim \chi_+ f + \chi_- f^*$, а при квантовании вакуум не содержит нулевую энергию. Однако стандартная замена комплексного поля вещественным скалярным полем с частотным разложением $\chi \sim \chi_+ f + \chi_+^* f^*$ приводит к нулевой энергии. Это означает, что такая простая замена не безобидна и имеет серьёзные последствия, делающие теорию несостоятельной.

Таким образом, стандартный механизм генерации массы должен быть улучшен так, чтобы нейтральное скалярное поле содержало состояния как частицы, так и античастицы, даже если они практически неразличимы.

Есть ещё одна серьёзная проблема со скалярным полем - степенной рост его петлевых поправок. Эти поправки становятся очень большими при энергии Планка Λ_g, и поэтому теория с фундаментальным скалярным полем останется несостоятельной даже после включения эффектов гравитации. По этой причине скалярное поле может быть в действительности эффективным полем с составным скалярным бозоном [7]. Различные модификации стандартного механизма генерации массы будут обсуждаться в [8].

6.3. Последовательная и простая теория струн

Теории релятивистских струн основаны на том факте, что при квантовании они приводят к критическому измерению пространства-времени: $D = 26$ для бозонных и $D = 10$ для фермионных струн (включая суперструны). Фактически критическая размерность является следствием наличия расходящихся нулевых энергий струнных мод (см. детали в [7,8]). Она возникает из требования устранения аномалий, возникающие из-за остаточного вклада нулевой энергии струнных мод после их «регуляризации».

Рассмотрим ШФ-квантование струн. Для бозонной струны действие:

$$S = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{h}\, h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu = -T\int d^2\sigma\, \partial_\alpha Y_\mu^* \partial^\alpha Y^\mu, \tag{45}$$

где $Y^\mu = (X_R^\mu + iX_L^\mu)/\sqrt{2}$, $Y^{\mu *} = (X_R^\mu - iX_L^\mu)/\sqrt{2}$. В методе ШФ, во-первых, вместо суперпозиции мод $\tau \pm \sigma$, движущихся вправо или влево, каждая из которых имеет положительную и отрицательную энергию, одна из мод выбирается в качестве основной, например, правая с положительной энергией $Y_+^\mu(\tau - \sigma)$, движущаяся только вперёд во времени. Во-вторых, положительно-энергетическую моду $Y_+^\mu(\tau + \sigma)$ тогда можно описать как ту же правую, но с отрицательной энергией и движущейся только назад во времени. В-третьих, функцию действия надо переписать с учётом этих двух свойств как:

$$S = -T\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int d\sigma [\theta(\tau_1 - \tau_0)\partial_\alpha Y_+^* \partial^\alpha Y_+ - \theta(\tau_0 - \tau_1)\partial_\alpha Y_-^* \partial^\alpha Y_-] \tag{46}$$

Для замкнутых струн частотные моды для комплексных координат принимают вид:

$$\begin{aligned} Y^\mu(\tau - \sigma) &= Y_0^\mu + \frac{il}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} + \alpha_{-n}^\mu e^{2in(\tau-\sigma)}), \\ Y^{\mu *}(\tau - \sigma) &= Y_0^{\mu *} - \frac{il}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_n^{\mu *} e^{2in(\tau-\sigma)} + \alpha_{-n}^{\mu *} e^{-2in(\tau-\sigma)}), \end{aligned} \tag{47}$$

где $l^2 = 1/\pi T$. Здесь времена τ умножаются только на положительные «частоты» с $n > 0$. Сохраняющиеся импульсы, соответствующие $Y^{\mu}, Y^{\mu *}$, есть $P^{\mu}_{\alpha\pm} = \pm T\,\partial_{\alpha} Y^{\mu *}_{\pm}$, $\partial^{\alpha} P^{\mu}_{\alpha\pm} = 0$, а их коммутаторы имеют вид:

$$[Y^{\mu}_{\pm}(\tau,\sigma'), P^{\nu}_{\tau\pm}(\tau,\sigma)] = -i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma'). \tag{48}$$

Подстановка (47) даёт (отличные от нуля) коммутаторы для мод:

$$[\alpha^{\mu}_{m}, \alpha^{\nu *}_{n}] = [\alpha^{\mu}_{-m}, \alpha^{\nu *}_{-n}] = -m\,\delta_{mn}\eta^{\mu\nu}. \tag{49}$$

Гамильтониан в итоге принимает вид:

$$H = T^{-1}\int_0^{2\pi} d\sigma\, P_{\alpha\pm} P^{\alpha *}_{\pm} = H_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha^{\mu *}_{n}\alpha_{n\mu} - \alpha^{\mu *}_{-n}\alpha_{-n\mu}), \tag{50}$$

где H_0 содержит независимые от n конечные члены. Таким образом, нулевой энергии нет и теория последовательна.

Операторы L_m алгебры Вирасоро автоматически нормально-упорядочены $L_0\left|0\right\rangle = 0$, и их коммутаторы не содержат аномалии:

$$L_m = L_{m+} + L_{m-} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{\mu *}_{m+n}\alpha_{n\mu},\ [L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}. \tag{51}$$

Следовательно, алгебра операторов группы Лоренца замкнута и также не содержит аномальных членов.

Таким образом, теория бозонной струны не содержит нулевой энергии и не имеет соответствующих аномалий, что означает, что в ней нет нужды в критическом измерении D. Аналогичная ситуация имеет место и для фермионной струны, которая также свободна от нулевой энергии [8]. Следовательно, в трактовке ШФ теория струн последовательна и достаточно проста, но она не может решить проблемы объединения.

6.4. ШФ-трактовка квазичастиц и антиквазичастиц в сплошных средах

Методы квантования систем гармонических осцилляторов и, в более широком смысле, методы квантовой теории поля, естественным образом применяются в теории конденсированных состояний. Тот факт, что вместо частиц и античастиц появляются квазичастицы и антиквазичастицы (или дырки), меняет только специфику, но основные преимущества методов теории поля остаются прежними и оказываются весьма полезными. В случае новой, более последовательной версии трактовки ШФ ситуация такая же, и в будущем она может оказаться полезной для решения соответствующих проблем конденсированных сред.

В системах, где есть нулевая энергия в основном состоянии новых возможностей может и не быть, но в некоторых случаях этот метод станет одним из удобных способов описания. Однако в системах, где условия отсутствия нулевой энергии удовлетворены, этот факт будет либо легче описать, либо, если он ранее не был известен, он будет предсказан и обнаружен.

Особенно интересными могут быть приложения в системах с нетривиальными свойствами и эффектами, таких как графен и другие двумерные структуры. В них состояния без нулевой энергии уже известны, как и состояния, описываемые уравнением Дирака, поэтому здесь новый метод, естественный как раз для таких случаев, может стать полезным рабочим инструментом [8].

7. Заключение

Квантование в трактовке ШФ релятивистских систем с состояниями отрицательной энергии, включая релятивистские поля и струны, непротиворечиво, поскольку нормы всех состояний положительны с учётом того факта, что лагранжиан меняет знак, когда в функции действия меняется направление интегрирование по времени. В этой трактовке КТП с частицами обеих знаков энергии, идущими в противоположных направлениях времени, эквивалентна теории с картиной античастиц с положительной энергией, но не содержит нулевой энергии. Отсутствие вклада свободных полей в энергию вакуума частично решает проблему космологической постоянной.

Для фермионных полей новый метод квантования оказывается естественным, и стандартный канонический формализм меняется незначительно. Канонический формализм для комплексных бозонных полей претерпевает более существенное изменение, поскольку их канонически сопряжённые операторы поля становятся некоммутативными. Но поскольку наблюдаемые свободных полей описываются их вещественными билинейными произведениями, с физической точки зрения проблем нет. В стандартной трактовке такая ситуация была с фермионными полевыми операторами.

Для взаимодействующих полей трактовка ШФ вводит симметричные во времени $\hat{T}$ -произведения операторов, которые прямо приводят к причинным пропагаторам ШФ и модифицируют диаграммную технику, сохраняя конечные результаты стандартной КТП. Новый метод модифицирует условия микропричинности, механизм генерации массы и доказательство теоремы о спине и статистике, делает последовательными и более простыми теории струн. Метод также может быть полезным в теории конденсированных сред, особенно для двумерных систем.

Таким образом, новый метод квантования с последовательным проведением трактовки ШФ можно рассматривать как шаг к состоятельной и конечной КТП [8].

Литература

1. Stueckelberg E.C.G. (1941) *Helv. Phys. Acta* **14**, 588.
2. Feynman R. (1949) *Phys. Rev*. https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.769.
3. Bjorken J.D., Drell S. D. (1964) *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, N.Y.
4. Pauli W. (1943) *Rev. Mod. Phys*. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.15.175
5. Bjorken J.D., Drell S. D. (1965) *Relativistic Quantum Fields*. McGraw-Hill, N.Y.
6. Pavšič M. (1999) *Phys. Lett*. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(99)00145-0.
7. Zakir Z. (2020) *Quant. and Grav. Phys*. http://dx.doi.org/10.9751/QGPH.1-001.7128.
8. Закир З. (2020) *Конечная квантовая теория поля*. ЦТФА, Т.