КВАНТОВАЯ И ГРАВИТАЦИОННАЯ ФИЗИКА
6:029, 34 с., 29.12.2025; doi:10.9751/KGF.6-029.9129
ISSN 2181-0478; EISSN 2181-0494

Время-симметричные релятивистская и квантовая теории. 2. Время-симметричная релятивистская квантовая механика

Захид Закир[1]

Аннотация

Интерпретация Зисмана-Штюкельберга-Фейнмана (ЗШФ), описывая античастицы как частиц отрицательной энергии, идущих назад в обычном времени, делает релятивистскую квантовую механику (РКМ) ковариантной, но релятивистская теория не была согласована с ней. Последовательное согласование с интерпретацией ЗШФ привело к время-симметричной теории относительности (ВСТО) (статья 1). В ВСТО принцип относительности распространён на системы покоя частиц отрицательной энергии, идущие в нижний световой конус, а группа симметрии расширена до общей группы Лоренца O(1,3) с 4-инверсией. В данной статье на базе ВСТО формулируется время-симметричная РКМ (ВС РКМ). Состояния частиц отрицательной энергии в их системах покоя преобразуются в обычные системы отсчёта с отражением оси времени. В формализме Гамильтона-Якоби трансляционная симметрия ведёт к общему релятивистскому волновому уравнению для компонент волновой функции любой свободной частицы с квадратичным гамильтонианом. Учёт в нём релятивистской связи энергии и импульса даёт уравнение Клейна-Гордона, из которого следуют общее среднее 4-импульса и общий поток вероятности, временные компоненты которых описывают потоки в обе стороны оси времени и отрицательны при отрицательной энергии. Специальные волновые уравнения с первой производной по времени (Даффина-Кеммера-Петью для спинов 0 и 1, и Дирака для спина ½) учитывают смешивание компонент волновой функции из-за спина и взаимодействий. В ВСТО 4-векторы токов меняют знак при 4-инверсии, что корректирует теории бозонов и фермионов, исключая прежние парадоксы и ошибки. Время-симметричные амплитуды перехода в пропагаторном подходе ведут к причинным пропагаторам и к обычной диаграммной технике. Полная энергия системы частиц в петлевой диаграмме создаёт внешнее гравитационное поле, которое замедляет собственные времена относительно мирового времени вплоть до застывания на планковской длине, гравитационном радиусе системы. Это ведёт к гравитационной регуляризации петлевых диаграмм, делая их конечными, а поля Стандартной Модели (кроме скалярного) и квантовую гравитацию ещё и перенормируемыми. Квантование полей на базе ВСТО изложено в статье 3.

Ключевые слова: частицы отрицательной энергии, античастицы, инверсия времени, 4-инверсия, общая группа Лоренца, время-симметричная теория относительности

Содержание

[1] *Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент, Узбекистан*; zzakir@qgph.org, ORCID

1. Введение

Ковариантный формализм релятивистской квантовой механики (РКМ) включает частицы отрицательной энергии. В 1930 г. Дирак первым связал их с античастицами, выдвинув гипотезу о дырках в заполненном вакууме отрицательной энергии [1]. Но более корректную интерпретацию нашли позже Зисман (1940) [2] и Штюкельберг (1941) [3], которые показали, что при рассмотрении траекторий «в целом» античастицы можно описывать как те же частицы, но с отрицательной энергией и потому «идущие назад» в обычном времени t. Затем Фейнман в 1949 г. [4] создал на этой основе пропагаторный подход с причинными пропагаторами и развил ковариантную диаграммную технику.

Интерпретация Зисмана-Штюкельберга-Фейнмана (ЗШФ) [2-4] прямо следует из релятивистской кинематики и широко используется, проявляясь в физике частиц в виде кроссинг-симметрии. Но в РКМ она применялась непоследовательно, а с квантовой теорией поля (КТП), где вакуум есть состояние наименьшей энергии, была попросту несовместимой. Считалось, что интерпретация ЗШФ ведёт к отрицательной вероятности, были проблемы и в теории фермионов [5,6]. Как будет показано в статье, эти проблемы оказались лишь следствиями непоследовательного применения интерпретации ЗШФ.

Главным недостатком прежней формулировки РКМ было то, что релятивистская теория по-прежнему была ограничена ортохронной группой Лоренца без отражения оси t. Для согласования же с интерпретацией ЗШФ требуются системы покоя частиц отрицательной энергии, где измеряются их собственные времена. Их базисы, состоящие из антивещества, в терминах отрицательных энергий идут назад по оси t. В частности, в атоме антиводорода антипротон есть базис системы координат, который при описании как протона отрицательной энергии есть базис системы отсчёта идущей назад по оси t. Ось времени таких систем отсчёта обратна к t и переходы к обычной системе отсчёта включают отражение оси времени с переходом в противоположный световой конус.

Это требует расширения принципа относительности и группы преобразований на системы отсчёта идущие в нижний световой конус. Для инерциальных систем отсчёта (ИСО) такой группой является общая группа Лоренца $O(1,3)$, включающая 4-инверсию и охватывающая обе времениподобные световые конусы. Включение трансляций ведёт к общей группе Пуанкаре (см. [7]). Основные положения время-симметричной теории относительности (ВСТО) на основе этих групп были приведены в статье 1 [8]. В данной статье описывается время-симметричная РКМ (ВС РКМ) основанная на ВСТО.

В ВС РКМ вводится новая концепция волновых уравнений и потока вероятности. Для релятивистской кинематики, где гамильтониан фигурирует квадратично, наиболее приспособленным оказался формализм Гамильтона-Якоби. Лагранжев и гамильтонов формализмы ранее вели к усложнениям и трудно неразрешимым проблемам, попытки решения которых привели к ряду ошибок и противоречий. Трансляционная симметрия ведёт в ВС РК к *общему волновому уравнению* для компонент волновой функции свободной релятивистской частицы $-\hbar^2\partial_t^2\psi = H_0^2\psi$, которое с учётом связи энергии и импульса даёт уравнение Клейна-Гордона (КГ) $(\partial^\mu\partial_\mu + \kappa^2)\psi = 0$, где $\kappa = mc/\hbar$. Оно даёт общее среднее 4-импульса и пропорциональное ему общий поток вероятности, временные компоненты которых есть потоки в обе стороны оси времени и, в частности, отрицательны при отрицательной энергии частиц. Это исправляет ошибку прежней РКМ, где знак потока вероятности приписывался самой вероятности.

Спин и взаимодействия ведут к смешиванию компонент волновой функции, которые выражают *специальные волновые уравнения* вида $(i\Gamma_s^\mu D_\mu - \kappa)\psi = 0$ с первой производной по времени в удлинённой производной D_μ. Они следуют из общего волнового уравнения при линеаризации релятивистского гамильтониана. Для спинов $s = 0,1$ - это уравнение Даффина-Кеммера-Петью (ДКП) с $\Gamma_{0,1}^\mu = \beta_{0,1}^\mu$ [9-11] (см. [6,12]), а для спина $s = 1/2$ - уравнение Дирака с $\Gamma_{1/2}^\mu = \gamma^\mu$. Формализм Фешбаха-Вилларса для спина 0 [13] был лишь первым шагом к формализму ДКП и вел к ряду проблем.

В теории Дирака 4-векторы потока вероятности и электромагнитного тока при положительном заряде были обратными к 4-импульсу частицы отрицательной энергии, что считалось достижением теории. В действительности это было недостатком теории, поскольку в релятивистской теории знаки этих потоков должны совпадать со знаком 4-импульса. В ВС РКМ знаки этих токов совпадают со знаком 4-импульса и это делает теорию фермионов состоятельной, исключая также прежние парадоксы.

Время-симметричные амплитуды перехода ВС РКМ в пропагаторном подходе ведут к причинным пропагаторам и к обычной диаграммной технике.

В петлевых диаграммах главной проблемой релятивистской квантовой теории были ультрафиолетовые расходимости. Эта проблема возникает уже в РКМ и потому тоже должна была решиться в её рамках, далее не возникая в КТП. В ВС РКМ она решена учётом требуемого общей теорией относительности (ОТО) внешнего гравитационного поля, создаваемого системой частиц в петлевой диаграмме [14]. Оно ведёт к замедлению собственных времён частиц относительно мирового времени асимптотически-плоского пространства-времени, а вблизи планковской длины, гравитационного радиуса системы частиц, все процессы застывают. Такая гравитационная саморегуляризация петлевых диаграмм на планковской длине делает их конечными. Поскольку эффективные константы связи калибровочных полей Стандартной Модели (СМ) и квантовой гравитации остаются малыми, эти теории оказываются ещё и перенормируемыми.

В статье скорость света c и постоянная Планка $\hbar$ показываются явно, поскольку при $c = 1$ временная компонента *потока* вероятности для бозонов $j_\pm^0 = (\pm c)\rho$ выглядела как плотность вероятности двух знаков $\pm\rho$ и потому считалось, что РКМ приводит к отрицательной вероятности.

В разделе 2 рассмотрены ВСТО, волновые функции, общее волновое уравнение и общий ток вероятности. В разделах 3-4 рассмотрены специальные волновые уравнения для бозонов и фермионов и их решения, а также токи взаимодействий. В разделе 5 описаны причинные пропагаторы и диаграммная техника. В разделе 6 описана гравитационная саморегуляризация петлевых диаграмм. В третьей статье [15] будет изложена время-симметричная КТП на базе ВСТО. Предварительная формулировка основных идей ВС РКМ была дана в [16], а более детальное изложение приведено в книге [17].

2. ВСТО, общий поток вероятности, общее и специальное волновые уравнения

2.1. Системы отсчёта в ВСТО, ориентируемые гиперповерхности и поток вероятности в двух направлениях оси времени

В прежней РКМ частицы отрицательной энергии описывались только в обычных ИСО K_+ с осью обычного времени t_+ (далее будем писать t). В ВСТО вводятся также системы покоя частиц отрицательной энергии K_{0-}, где измеряются их собственные времена τ_-. Они идут назад по оси t и их ось времени t_{0-} обратна к t. Для удобства перехода к K_+ вводится также ИСО K_-, которая как и K_{0-} идёт назад по оси t, но покоится в пространстве относительно K_+, имея свою осью времени $t_- = -t$. Координаты одного и того же события в K_+ и K_- связаны 4-инверсией: $x_-^\mu = -x_+^\mu$.

Итак, в ВСТО состояния частиц отрицательной энергии задаются сначала в их системах покоя K_{0-}, затем собственными преобразованиями Лоренца преобразуются в K_- и после этого 4-инверсией преобразуются в K_+, где производятся все наблюдения. Результатом этих собственных и несобственных преобразований из общей группы Лоренца $O(1,3)$ является описание частиц обеих знаков энергии в координатах K_+.

Операторы этих преобразований коммутируют [7] и их можно переставить, т.е. можно 4-инверсией перейти из K_{0-} в систему K'_+, движущуюся относительно K_+, и уже потом из этой системы собственными преобразованиями перейти в K_+.

В релятивистской механике принцип наименьшего действия ведёт к тому, что интеграл вдоль траектории по собственному времени должен быть максимальным. При отрицательной энергии по-прежнему $\tau_1 > \tau_0$ между событиями на траектории, но теперь $t(\tau_1) < t(\tau_0)$ и интегрирование по t идёт от настоящего к прошлому. Перестановка пределов меняет знак интеграла по времени, но знак минус от $dt_- = -dt$ компенсирует этот знак, что в итоге ведёт к обычному интегрированию от настоящего к будущему.

Вариация действия изменением верхнего предела в интеграле вдоль истинных траекторий $\delta S_\pm = -p_{\mu\pm}\delta x_\pm^\mu$ даёт для 4-импульса и гамильтониана:

$$p_{\mu\pm} = -\frac{\partial S_\pm}{\partial x_\pm^\mu}, \qquad H_\pm = cp_{0\pm}(p_i) = -\frac{\partial S_\pm}{\partial t_\pm}. \tag{1}$$

Из $u_{\mu\pm}u_\pm^\mu = 1$ следует $p_{\mu\pm}p_\pm^\mu = m^2c^2$, а подстановка $p_{\mu\pm}$ из соотношения (1) ведёт к релятивистскому уравнению Гамильтона-Якоби. Гамильтониан входит в это уравнение квадратично и выражение для него через 3-импульс $\vec{p}$ имеет два знака. В квантовой теории это ведёт к общему волновому уравнению со второй производной по времени.

В ВС РКМ вероятности положительны, а потоки через пространственноподобные гиперповерхность Σ_μ, включая поток вероятности и токи взаимодействия, меняют знак при изменении знака энергии. Это следует из того факта, что частицы этих потоков пересекают Σ_μ с разных направлений и проекция их 4-скорости на времениподобную нормаль $\mathbf{n}_+$ имеет разные знаки. Потоки меняют знак и при отражении оси t, так как при том же потоке меняется нормаль, на которую проецируется вектор потока.

В релятивистской теории гиперповерхности Σ_μ имеют две стороны, обращенные соответственно в будущее и в прошлое, нормаль $\mathbf{n}_+$ к одной стороне направлена в верхний световой конус, а нормаль $\mathbf{n}_-$ к другой стороне направлена в нижний. В обычной релятивистской теории вводились только гиперповерхности $\Sigma_{\mu+}$ с нормалью $\mathbf{n}_+$ и поэтому ориентация была тривиальной. Наличие второго типа систем отсчёта, идущих в нижний световой конус с осью t_-, обратной к t, означает наличие также $\Sigma_{\mu-}$ с нормалью $\mathbf{n}_-$ и поэтому в ВСТО Σ_μ обладают нетривиальной ориентацией.

Рассмотрим гиперповерхность Σ с ориентированным элементом $d\Sigma_\mu = n_\mu d^3\Sigma,$ где n_μ - компоненты времениподобной единичной нормали с $n^\mu n_\mu = 1$, а $d^3\Sigma > 0$ - элемент неориентированного (обычного) 3-объёма. Инвариантный полный поток вероятности через Σ есть интеграл по Σ от вектора плотности потока вероятности j^μ:

$$P[\Sigma] = \int_\Sigma d\Sigma_\mu j^\mu = \int_\Sigma d^3\Sigma (n_\mu j^\mu). \tag{2}$$

Из $\partial_\mu j^\mu = 0$ следует независимость $P[\Sigma]$ от выбора Σ (обычные граничные условия). В системе покоя частицы (2) интеграл по гиперповерхности $t = const$ в K_+ имеет вид:

$$P[\Sigma] = \int_\Sigma d\Sigma_0 j^0 = \int_{V_{(0)}} dV_{(0)} (n_0 j^0), \tag{3}$$

где $V_{(0)}$ - инвариантный и достаточно большой собственный нормировочный объём,.

В прежней РКМ отрицательность j^0 ошибочно считалась отрицательностью плотности вероятности. Поскольку отрицательная вероятность недопустима, то 4-вектор j^μ умножался на абсолютную величину заряда и интерпретировался как плотность тока взаимодействия. Ответ же на вопрос о потоке вероятности отсылался к КТП, признавая тем самым несостоятельность теории бозонов РКМ.

В ВС РКМ j^μ считается именно тем, чем он и является, т.е. 4-вектором потока вероятности, знак которого определяется 4-импульсом. В частности, знак j^0 показывает направление потока по оси времени. Собственный поток вероятности в системе покоя Σ выражается через собственную плотность вероятности $\rho_\Sigma(x) \geq 0$:

$$c\rho_\Sigma(x) = n_\mu j^\mu(x). \tag{4}$$

При 4-инверсии меняются знаки как j^μ, так и ориентированного элемента $d\Sigma_\mu$:

$$j^\mu \mapsto -j^\mu, \qquad d\Sigma_\mu \mapsto -d\Sigma_\mu, \tag{5}$$

и поэтому интеграл $P[\Sigma]$ в (2) и $\rho_\Sigma = n_\mu j^\mu$ остаются положительно-определёнными.

В релятивистской теории компоненты 4-скорости $u^\mu = dx^\mu / ds$ есть компоненты касательного вектора к траектории и через них определяются компоненты ряда других тензорных величин. В квантовой теории задаются плотности вероятности этих величин, выражаемые через билинейные формы волновой функции. В частности, в тензор энергии-импульса потока частиц, имеющий в отсутствие давления вид $T^{\mu\nu} = \varepsilon_{(0)} u^\mu u^\nu$, входят инвариантная собственная плотность энергии $\varepsilon_{(0)} = dE_{(0)} / dV_{(0)}$ и две 4-скорости, делающие $T^{\mu\nu}$ тензором второго ранга.

Вектор плотности потока вероятности j^μ, подобно электромагнитному току и $T^{\mu\nu}$, определятся как произведение инвариантной собственной плотности вероятности $\rho_{(0)} = dw / dV_{(0)}$ и cu^μ:

$$j^\mu = \rho_{(0)} c u^\mu = \frac{1}{m} \rho_{(0)} mcu^\mu . \tag{6}$$

В ВСТО важно то обстоятельство, что $\rho_{(0)}$ - это плотность вероятности, измеренная в системе покоя частицы, а 4-скорость u^μ измеряется в K_+, где частица движется. Поскольку знак 4-скорости определяет знак 4-импульса, то знак j^0 совпадает со знаком энергии. Поэтому в ВСТО вероятности положительны и инвариантны, но их поток j^0 имеет два знака, которые указывают направление пересечения потоком Σ_{0+}, гиперповерхности одновременности $t = const$.

2.2. Инвариантная и лабораторная волновые функции, физические величины

В нерелятивистской квантовой механике комплексная волновая функция частицы в экспоненциальном виде $\psi(x,t) = \sqrt{\rho(x,t)} \exp[iS_{nr}(x,t)/\hbar]$ включает плотность вероятности $|\psi|^2 = \rho$ и фазовую функцию S_{nr}. Градиент последней $\vec{\nabla} S_{nr} = m\vec{v} = \vec{p}$ даёт дрейфовый импульс, а в квазиклассическом пределе S_{nr} связана с функцией действия частицы.

Релятивистская волновая функция в системе покоя совпадает с нерелятивистской с точностью до фазовых и спинорных факторов. Введение волновых функций в РКМ поэтому начнём с системы покоя частицы $K_{(0)}$, где волновая функция $\psi_{(0)}$ связана с собственной плотностью вероятности $\rho_{(0)}$ в $V_{(0)}$ и имеет вид:

$$\psi_{(0)}(x_{(0)}) = \sqrt{\rho_{(0)}(x_{(0)})}\, u_{(0)} e^{iS_{(0)}(x_{(0)})/\hbar} . \tag{7}$$

В неё входят лишь инвариантные величины: $\rho_{(0)}$, (изо)спинор в системе покоя $u_{(0)}$ и фаза $S_{(0)}/\hbar$, которая включает добавку из-за энергии покоя $mc^2 t/\hbar$. Поэтому $\psi_{(0)}$ инвариантна и далее будем называть её *инвариантной волновой функцией* частицы.

Полная вероятность в объёме $V_{(0)}$ и билинейная форма $\bar{\psi}_{(0)}\psi_{(0)}$ равны:

$$w(V_{(0)}) = \int_{V_0} dV_{(0)} \frac{dw}{dV_{(0)}} = \int_{V_0} dV_{(0)}\, \bar{\psi}_{(0)} \psi_{(0)} , \tag{8}$$

$$\bar{\psi}_{(0)} \psi_{(0)} = \rho_{(0)} \bar{u}_{(0)} u_{(0)} , \tag{9}$$

Здесь $w(x,t)$ - локальная вероятность, полная вероятность в $V_{(0)}$ нормирована $w(V_{(0)})=1$ при условии $\bar{u}_{(0)}u_{(0)}=1$, а $\bar{\psi}$ обозначает $\psi^{+}\Gamma_{s}^{0}$, где $\Gamma_{s}^{0}=\beta_{s}^{0}$ для спинов 0 и 1 в формулировке ДКП, и $\Gamma_{1/2}^{0}=\gamma^{0}$ для спина ½ (см. разделы 3-4).

Волновая функция ψ в лабораторной системе отсчёта $K_{\pm}$, в общем случае движущейся относительно $K_{(0)}$, отличается от $\psi_{(0)}$ из-за тензорных (спинорных) свойств и преобразования объёма $V_{(0)}\to V(V_{(0)})$. Поэтому её будем называть *лабораторной волновой функцией*. При переходе в K_{+} соотношение (8) принимает вид:

$$w=\int\limits_{V_0} dV_{(0)}\,\bar{\psi}_{(0)}\psi_{(0)}=\frac{V_{(0)}}{V}\int\limits_{V(V_0)} dV\,\bar{\psi}\psi\,\frac{\bar{\psi}_{(0)}\psi_{(0)}}{\bar{\psi}\psi}. \tag{10}$$

Здесь интегрирование по лабораторному объёму V идёт только в той части пространства, которая связана с собственным объёмом V_0 из $K_{(0)}$ релятивистским соотношением. При переходе из $K_{(0)-}$ в K_{+} и условии $\bar{\psi}_0\psi_0/\bar{\psi}\psi=const$ соотношение (10) имеет вид:

$$w=\frac{V_{(0)}}{V}\frac{\bar{\psi}_{(0)}\psi_{(0)}}{\bar{\psi}_{-}\psi_{-}}\int\limits_{V(V_0)} dV\,\bar{\psi}_{-}\psi_{-}=\frac{\bar{u}_{(0)}u_{(0)}}{\bar{v}v}\int\limits_{V(V_0)} dV\,\bar{\psi}_{-}\psi_{-}, \tag{11}$$

где v - спинор в K_{+} для отрицательно-энергетического состояния.

Ранее нормировка $V=1$ во всех системах отсчёта скрывала тот факт, что билинейные формы дают плотности вероятности и искажала свойства преобразований этих форм. Так как в релятивистской теории инвариантны лишь V_0, то естественна лишь нормировка $V_0=1$, которая даёт $V=mc^2/E_{p\pm}$. Поэтому в релятивистской теории нормировка в конечном объёме обязательна для учёта трансформационных свойств ψ.

В квантовой теории физическим величинам соответствуют операторы F и измеримыми величинами являются их собственные значения f в состояниях ψ. Эти собственные значения определяются из уравнения $F\psi=f\psi$, где значения f, из-за однородности уравнения, не зависят от констант нормировки ψ. Эти собственные значения удобнее находить из матричного элемента с оператором физической величины:

$$\bar{\psi}F\psi=f\bar{\psi}\psi \tag{12}$$

Как видно из (12), $\bar{\psi}F\psi$ даёт не сами f, а умноженные на нормировочный фактор $\bar{\psi}\psi$ в его ненулевых точках $\bar{\psi}\psi\neq 0$. Поэтому f равны матричному элементу, делённому на этот (ненулевой) нормировочный фактор:

$$f=\frac{\bar{\psi}F\psi}{\bar{\psi}\psi}. \tag{13}$$

Далее учёт этого, очевидного на первый взгляд, факта в ВС РКМ позволит исправить ряд ошибок в теории фермионов прежней РКМ, позволяя сделать РКМ последовательной.

Рассмотрим следствия того, что в ВС РКМ физические величины определяются двумя видами волновых функций: $\rho_{(0)}$ задаётся инвариантной волновой функцией $\psi_{(0)}$ в системе покоя частицы, а u^{μ} определяется лабораторной волновой функцией ψ, заданной в K_{+}. При представлении ψ в экспоненциальной форме как в (7), собственные значения дрейфовой (вещественной) части оператора 4-импульса mcu^{μ} выражаются через комплексный оператор 4-импульса $i\hbar\partial^{\mu}$, определяемого из трансляционной симметрии:

$$\frac{i\hbar}{2}[\bar{\psi}\,\partial^{\mu}\psi-(\partial^{\mu}\bar{\psi})\psi]=mcu^{\mu}\bar{\psi}\psi\,, \tag{14}$$

$$mcu^{\mu}=\frac{i\hbar}{2}\frac{\bar{\psi}\,\partial^{\mu}\psi-(\partial^{\mu}\bar{\psi})\psi}{\bar{\psi}\psi}. \tag{15}$$

Это даёт для j^{μ} из (6), учитывая $\rho_0=\bar{\psi}_0\psi_0$, выражение:

$$j^{\mu}=\frac{1}{m}\rho_0 mcu^{\mu}=\frac{i\hbar}{2m}\frac{\bar{\psi}_0\psi_0}{\bar{\psi}\psi}[\bar{\psi}\,\partial^{\mu}\psi-(\partial^{\mu}\bar{\psi})\psi]. \tag{16}$$

Когда $\bar{\psi}_0\psi_0/\bar{\psi}\psi$ не зависит от координат, (16) ведёт к уравнению непрерывности:

$$\partial_{\mu}j^{\mu}=0. \tag{17}$$

Таким образом, в ВС РКМ плотность потока вероятности j^{μ} выражается через $\bar{\psi}_0\psi_0$ и mcu^{μ}, дрейфовую часть 4-импульса (15), и поэтому в конечное выражение j^{μ} входит нормировочный фактор $\bar{\psi}_0\psi_0/\bar{\psi}\psi$. Для свободных частиц положительной энергии он равен отношению плотностей вероятности и сводится к объёмному фактору: $\bar{\psi}_0\psi_0/\bar{\psi}\psi=V/V_0=mc^2/E_p$. Важность аккуратного определения плотности потока не сводится к уточнению вклада объёмного фактора и проявится в теории фермионов в *отличии в знаке*, что кардинально меняет ситуацию с вероятностной интерпретацией.

В следующем разделе будет показано, что общее волновое уравнение (22) для отдельных компонент волновой функции свободных частиц всех видов ведёт к j^{μ} в (16) и к уравнению непрерывности (17), выражающему сохранение вероятности. По этой причине j^{μ} становится *общим потоком вероятности* для любых свободных частиц.

В ВСТО временная компонента j^0 есть поток вдоль оси времени и его знак совпадает со знаком энергии [8]. В ВС РКМ это снимает прежние проблемы со знаками плотности вероятности для бозонов и плотности потока вероятности для фермионов. В разделе 4.3 будет показано, что учёт свойств преобразования спиноров ведёт к тому, что при отрицательных энергиях знаки собственных значений потока вероятности и токов взаимодействия такие же, как у бозонов и согласуются с требованиями ВСТО.

Выражения для специальных токов взаимодействия следуют из специальных волновых уравнений. Взаимодействие с калибровочным полем вводится удлинением производных или 4-импульсов, обеспечивающих калибровочную инвариантность уравнений. Для потенциала электромагнитного поля A^{μ} оно имеет вид: $D^{\mu}_{\pm}=\partial^{\mu}_{\pm}+ieA^{\mu}/\hbar c$. Токи взаимодействия отличаются от потока вероятности (16) умножением на заряды и трансформационными свойствами при 4-инверсии, могут содержать и потенциалы поля.

Компоненты токов взаимодействия j^0_e меняют знак вместе с зарядом. В ВС РКМ, где нет античастиц с зарядами, противоположными зарядам частиц, ситуация проще и вместо античастиц фигурируют частицы с тем же зарядом, как у частиц, но с отрицательной энергией и идущие назад в обычном времени.

В тех случаях, когда отличия между прежним и новым выражениями для потока вероятности для свободных частиц влияют на измеримые величины, ВС РКМ ведёт к новым наблюдаемым эффектам (см. [17]).

2.3. Общее волновое уравнение для релятивистских частиц

Вид волновых уравнений в K_+ и K_- для частиц, идущих вперёд во времени этих систем отсчёта одинаков, что требуется принципом относительности, выражаемом в инвариантности относительно группы $O(1,3)$. Поэтому эти уравнения и их решения запишем в K_+ и K_-, обозначая при необходимости индексом $\pm$.

Компоненты волновой функции свободной частицы удовлетворяют уравнению Шрёдингера, следующему из трансляционной симметрии:

$$i\hbar\partial_t\psi = H_0\psi. \tag{18}$$

При экспоненциальном представлении, подобному (7), отсюда следует уравнение Гамильтона-Якоби-Маделунга $H_0 = -\partial S/\partial t$ для фазы волновой функции, аналога функции действия, при этом, в отличие от классического гамильтониана, H_0 содержит как кинетический член с дрейфовым импульсом, так и сугубо квантовый член, выражающий скорость расплывания волнового пакета. Таким образом, в квантовой теории трансляционная симметрия прямо ведёт к аналогу гамильтон-якобиевского формализма.

В релятивистской кинематике квадрат 3-импульса $\vec{p}^2$ пропорционален не свободному гамильтониану H_0, а его квадрату:

$$H_0^2 = c^2(\vec{p}^2 + m^2c^2). \tag{19}$$

Поэтому при переходе к РКМ гамильтониан определить не просто, поскольку $\vec{p}^2 \sim \nabla^2$ и прямое определение H_0 как корня из выражения (19) ведёт к нелокальной теории с высшими производными.

Как, исходя из релятивистского гамильтониан (19), последовательно перейти к уравнению (18), но с первыми производными и по пространственным координатам, хорошо известно. Для этого необходимо ввести матричный гамильтониан, который по этой причине действует на многокомпонентную волновую функцию, и это реализовано в форме специальных волновых уравнений ДКП и Дирака. При этом матричный гамильтониан разный для разных спинов и смешивает компоненты волновых функций. Эти специальные уравнения будут рассмотрены в следующем разделе.

В данном разделе рассмотрим общее релятивистское волновое уравнение, которое проще, но и более универсальное, так как справедливо для отдельных компонент волновой функции любой свободной частицы. Оно следует из шредингеровской формы уравнения (18) при повторном применении к нему оператора $i\hbar\partial_t$:

$$-\hbar^2\partial_t^2\psi = H_0^2\psi. \tag{20}$$

Здесь свободный гамильтониан фигурируют в квадратичном виде, в чём проявляется специфика релятивистской кинематики. Оно аналогично релятивистской форме уравнения Гамильтона-Якоби $H_0^2 = (\partial S/\partial t)^2$, где подстановка импульса вдоль истинных траекторий $\vec{p} = \partial S/\partial\vec{x}$ и (19) даёт $(\partial S/c\partial t)^2 - (\partial S/\partial\vec{x})^2 = m^2c^2$ или $(\partial S/\partial x^\mu)(\partial S/\partial x_\mu) = m^2c^2$.

Для стационарных состояний (20) даёт уравнение с квадратом собственных значений энергии $E_{p\pm} = \pm E_p$, $E_p = c\sqrt{\vec{p}_\pm^2 + m^2c^2}$:

$$H_{(0)}^2\psi_i = E_{p\pm}^2\psi_i. \tag{21}$$

Отсюда, вместе с (18), следует, что собственные значения гамильтониана $E_{p\pm} = \pm E_p$ и есть состояния двух знаков энергии. Таким образом, наличие двух знаков $E_{p\pm}$ ведёт к удвоению пространства состояний и время-симметричному формализму ВС РКМ.

Подстановка в (20) выражения (19) и $\vec{p} = i\hbar\nabla$ ведёт к уравнению КГ:

$$(\partial_\pm^\mu \partial_{\mu\pm} + \kappa^2)\psi_{i\pm} = 0. \tag{22}$$

Уравнение КГ выражает релятивистскую связь между энергией и импульсом и поэтому, будучи дифференциальной формой общего волнового уравнения (19), справедливо для компонент волновой функции любой свободной релятивистской частицы.

Универсальность уравнения КГ (22), известная с начала формирования РКМ, в ВС РКМ приобретает принципиально важное значение, так как ведёт к общему среднему от 4-импульса p^μ и к общему потоку вероятности j^μ, а также уравнениям сохранения для этих двух важнейших векторов РКМ.

В уравнение КГ (22) входит вторая производная по времени $\partial_t^2\psi$ и поэтому считалось, что начальные значения надо задавать и для $\partial_t\psi$. Произвольность начального значения $\partial_t\psi$ в РКМ, естественно, кардинально изменило бы теорию, в частности, для потока вероятности. Однако, это утверждение было ошибочным, так как в квантовой теории такого произвола нет. В РКМ уравнение Шредингера (18) сохраняет силу и задание начальной волновой функции автоматически определяет, через гамильтониан, и её производную по времени.

Поэтому, как отмечалось выше, вопрос состоял в том, как построить локальный гамильтониан. Для однокомпонентной волновой функции это оказалось невозможным и переход к уравнению (18) привёл к многокомпонентным волновым функциям, разным для разных спинов и удовлетворяющим различным специальным волновым уравнениям.

Но и это оказалось справедливым лишь частично, поскольку когда из (21) известны собственные значения квадрата энергии H_0^2 для стационарных состояний, то для них справедливо $i\partial_t\psi_0 = E_{p\pm}\psi_0$. Это означает бóльшую ограниченность решений уравнений первого порядка (18), что отличает РКМ от теории с чистым уравнением второго порядка (22) без каких либо ограничений на $\partial_t\psi$. Отсюда следует, что зависимость от времени свободных волновых функций тоже универсальна, не зависит от спинов и прямо следует из общего уравнения (22).

2.4. Специальные волновые для релятивистских частиц

Общее волновое уравнение (20) содержит $\partial_t^2\psi$, из-за чего формально надо задавать начальные значения и для $\partial_t\psi$. Кроме того, в (20) входит не H_0, а его квадрат $H_{0\pm}^2$. Поэтому надо было преобразовать (20) в шредингеровскую форму, к частному волновому уравнению с $\partial_t\psi$ и $H_{0\pm}$. Как отмечалось выше, такие *специальные волновые уравнения* имеют общий вид:

$$(i\,\Gamma_s^\mu D_\mu - \kappa)\psi = 0, \tag{23}$$

где s - спин. Для бозонов спина 0 и 1 имеем $\Gamma_{0,1}^\mu = \beta_{0,1}^\mu$, где β_0^μ и β_1^μ - матрицы ДКП (см. раздел 3), а для фермионов $\Gamma_{1/2}^\mu = \gamma^\mu$, матрицы Дирака.

Если в случае общего волнового уравнения более приспособленным к специфике релятивистской теории, оперирующем с квадратом гамильтониана, оказывается гамильтон-якобиевский формализм, то в случае специальных волновым уравнениям в шрёдингеровской форме с первой производной по времени и с самим гамильтонианом, то можно пользоваться обычной лагранжевым и гамильтоновым формализмами. Как известно, специальные волновые уравнения следуют из лагранжиана:

$$\mathcal{L} = c\bar{\psi}(i\hbar\Gamma_s^{\mu}D_{\mu} - mc)\psi. \tag{24}$$

который даёт соответствующий гамильтониан.

Эти специальные уравнения накладывают ограничения на решения общего уравнения по следующим причинам. Во-первых, явным образом снимают произвол в выборе начальных значений для $\partial_t\psi$, в частности, подтверждают универсальность зависимости от времени стационарных состояний. Во-вторых, учитывают взаимосвязи компонент волновой функции, следующие из наличия спиновых и иных степеней свободы, а также взаимодействий. Таким образом, специальные волновые уравнения более конкретны, выражают специфику каждого из спиновых и зарядовых состояний и поэтому лежат в основе практических применений теории.

Специальные волновые уравнения для бозонов спина 0 и 1 – это уравнения ДКП, которые будут рассмотрены в разделе 3.1. В этом представлении волновая функция для частицы спина 0 - это 5-компонентный спинор, где одна компонента – плотность скаляра, а остальные четыре – её производные. Волновая функция для частицы спина 1 - это 10-компонентный спинор, где четыре компоненты образуют вектор, а остальные шесть компонент равны компонентам тензора напряжённости для этого вектора.

Специальным волновым уравнением при спине ½ является уравнение Дирака, из которого впервые было обнаружено, что спин следует из релятивистской теории. Но это уравнение давало поток вероятности и токи взаимодействия, которые, вопреки релятивистским требованиям, не меняли знак при изменении знака энергии. Как было отмечено в разделе 2.3 и более детально будет показано в разделе 4.3, этот недостаток теории Дирака исправляется при более аккуратном определении собственных значений операторов, что затем впервые приводит к последовательной теории фермионов.

Итак, для каждого вида релятивистских частиц имеются два волновых уравнения: отдельные компоненты волновых функций удовлетворяют общему волновому уравнению (20) со второй производной по времени, ведущему к общим средней энергии и потоку вероятности для свободных частиц (16), а специальные волновые уравнения с первой производной (23) выражают смешивание компонент, связанные со спином и взаимодействиями частиц.

3. Время-симметричная теория бозонов

3.1. Специальное волновое уравнение ДКП для частиц спин 0 и 1

Наиболее известной и успешной из специальных волновых уравнений является уравнение Дирака для фермионов спина ½. Бозонным аналогом этого уравнения является уравнение ДКП [9-11] ([6,12]) с $\Gamma_{0,1}^{\mu} = \beta_{0,1}^{\mu}$ в (24):

$$(i\beta_s^{\mu}D_{\mu} - \kappa)\psi = 0, \tag{25}$$

являясь специальным волновым уравнением для бозонов конечной массы спина 0 и 1.

В формализме ДКП метод линеаризации Дирака применён для случая бозонов. Релятивистская инвариантность и эквивалентность квадрированного уравнения уравнениям КГ/Прока определяют свойства матриц β_s^{μ}. Они образуют базис алгебры Даффина–Кеммера с кубическими соотношениями антикоммутации:

$$\beta_s^\mu \beta_s^\nu \beta_s^\lambda + \beta_s^\lambda \beta_s^\nu \beta_s^\mu = g^{\mu\nu} \beta_s^\lambda + g^{\lambda\nu} \beta_s^\mu . \tag{26}$$

В изложениях РКМ обычно приводился формализм ФВ [13] (см. [5,6]), где $\partial_t \psi$ считается второй компонентой новой волновой функции и общее волновое уравнение переходит в два уравнения с первой производной по времени. Этот подход является лишь первым шагом к формализму ДКП и по этой причине порождал ряд проблем: а) волновые уравнения содержат $\vec{\nabla}^2$ и явно нековариантны; б) гамильтониан неэрмитов и поэтому оператор эволюции не унитарен; в) требуется нелинейное представление Фолди-Вутхойзена и физические задачи решаются приближённо; г) взаимодействия вводятся нековариантно, так как входили A^0 и $\vec{A}^2$.

Всех этих проблем нет в формализме ДКП, в котором все четыре производные исходной волновой функции $\partial_\mu \psi_i$ становятся компонентами новой волновой функции, 5-компонентной при спине 0 и 10-компонентной при спине 1. Волновая функция ψ_i есть столбец $(\psi_1,...,\psi_5)^T$ при спине 0 и $(\psi_1,...,\psi_{10})^T$ при спине 1, а общее волновое уравнение (23), после выбора числа компонент и матриц β^μ (5×5 и 10×10) переходит в систему ковариантных уравнений (25) только с первыми производными.

Преимуществами подхода ДКП являются: а) единая система для спинов 0 и 1 на базе одинаковой алгебры матриц β_s^μ; б) явная ковариантность из-за симметрии по координатам; в) эрмитовость гамильтониана; г) ковариантное введение взаимодействий; д) встроенные связи для компонент, позволяющие свести к уравнениям КГ/Прока; е) нет разрыва между формализмами для фермионов и бозонов; ж) упрощает расчёты в диаграммной технике из-за наличия приёмов алгебры матриц как в теории фермионов.

Единственным принципиальным недостатком формализма ДКП было то, что он вёл, как казалось, к отрицательным вероятностям. Поэтому было принято полагать, что теория бозонов может быть физически состоятельной только в квантовой теории поля. Но этот недостаток как раз и исчезает в ВС РКМ, где вероятности положительные, а знаки среднего значения энергии и потока вероятности показывает направление эволюции по оси t. Рассмотрим основы формализма ДКП и изменения, вносимые ВС РКМ.

Для спина 0 матрицы β_s^μ имеют вид:

$$\beta_0^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{\mu 0} & -\delta_{\mu 1} & -\delta_{\mu 2} & -\delta_{\mu 3} \\ \delta_{\mu 0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{\mu 1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{\mu 2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{\mu 3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Волновая функция в этом представлении имеет вид $\psi = (\psi^0, \psi^\mu)^T$

В случае спина 1 матрицы β_s^μ удобно представить в блочном виде:

$$\beta_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_3 & I_3 & 0_3 \\ \bar{0}^T & I_3 & 0_3 & 0_3 \\ \bar{0}^T & 0_3 & 0_3 & 0_3 \end{pmatrix}, \qquad \beta_1^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_3 & 0_3 & -iS_i \\ -e_i^T & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ \bar{0}^T & -iS_i & 0_3 & 0_3 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Здесь I_3 - единичная матрица 3×3, 0_3 - нулевая матрица 3×3, $\overline{0}$ - нулевая строка 1×3, e_i - базисные орты-строки $e_1=(1,0,0)$ и т.д., S_i - спиновые 3×3 матрицы для спина 1, при этом $(S_k)_{mn}=-i\epsilon_{kmn}$. Волновая функция в этом представлении имеет вид $\psi=(\psi^0,\vec{\psi},\vec{\pi},\vec{E})^T$, где первые 4 компоненты соответствуют 4-потенциалу, а последующие 6 компонент - антисимметричному тензору поля $F_{\mu\nu}$.

В случае спина 0 матрица β_0^0 связывает 1-ю и 2-ю компоненты волновой функции. Уравнение движения расщепляется, принимая вид:

$$(i\partial_0-\kappa)\psi_1=\kappa\psi_2\Rightarrow\psi_2\sim\dot{\psi}_1. \qquad (29)$$

Это подтверждает связь с уравнением второго порядка: ψ_1 играет роль плотности скаляра ϕ, а $\psi_2,\psi_3,\psi_4,\psi_5$ связаны (с точностью до множителей) с градиентами $\partial_\mu\phi$.

Сопряжённый спинор, ведущий к правильным ковариантным билинейным формам, определяется как:

$$\bar{\psi}=\psi^\dagger\eta_s^0,\qquad \eta_s^0=2\beta_s^0\beta_s^0-\mathbb{I}. \qquad (30)$$

Плотность лагранжиана с $\partial_\mu\to D_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu/\hbar c$ имеет вид:

$$\mathcal{L}=c\bar{\psi}(i\hbar\beta_s^\mu D_\mu-mc)\psi. \qquad (31)$$

Собственное преобразование $x'=\Lambda_\pm x$, где $\Lambda_+\in O^\uparrow(1,3)$ и $\Lambda_-\in O^\downarrow(1,3)$ ведёт к преобразованию спиноров с матрицей преобразования S_s:

$$\psi'(x')=S_s(\Lambda)\psi(x),\qquad S_s^{-1}(\Lambda)\beta_s^\mu S_s(\Lambda)=\Lambda_\nu^\mu\beta_s^\mu, \qquad (32)$$

$$S_s(\Lambda)=\sqrt{\frac{V}{V'}}\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\omega_{\mu\nu}\Sigma_s^{\mu\nu}\right),\qquad \Sigma_s^{\mu\nu}=\hbar(\beta_s^\mu\beta_s^\nu-\beta_s^\nu\beta_s^\mu). \qquad (33)$$

Здесь $\Sigma_s^{\mu\nu}$ - спиновый тензор, генератор собственных преобразований Лоренца. Расширение на дискретные элементы, включая 4-инверсию, ведёт к ковариантности относительно общей группы $O(1,3)$.

Симметрия $\psi\mapsto e^{i\alpha}\psi$ ведёт к 4-вектору потока вероятности:

$$j_s^\mu=\frac{c}{2}\bar{\psi}\,\beta_s^\mu\psi,\qquad \partial_\mu j_s^\mu=0. \qquad (34)$$

Аналог разложения Гордона для потока вероятности имеет вид:

$$j_s^\mu=c\bar{\psi}\,\beta_s^\mu\psi=\frac{1}{2m}[i\hbar\bar{\psi}\overleftrightarrow{\partial}^\mu\psi+i\partial_\nu(\bar{\psi}\Sigma_s^{\mu\nu}\psi)]. \qquad (35)$$

Поток j_s^μ, как и в теории Дирака, разделяется на две части:

а) конвективная (дрейфовая) часть:

$$j_{\text{conv}}^\mu=\frac{i\hbar}{2m}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\partial}^\mu\psi, \qquad (36)$$

имеет два знака, зависящих от знака 4-импульса, в частности, знак j_{conv}^0 совпадает со знаком энергии, что и требуется ВСТО;

б) спиновая/поляризационная часть (в виде дивергенции):

$$j^{\mu}_{\mathrm{s,pol}} = \frac{1}{2m} \partial_{\nu} (\bar{\psi} \Sigma^{\mu\nu}_{s} \psi), \tag{37}$$

не влияющая на $\partial_{\mu} j^{\mu}_{s}$, так как оператор $\partial_{\mu}\partial_{\nu}$ симметричен, а $\Sigma^{\mu\nu}_{s}$ антисимметричен.

В импульсном представлении для спинорной части потока получаем:

$$c\bar{u}(p')\beta^{\mu}_{s} u(p) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p')[(p'^{\mu} + p^{\mu}) + i\Sigma^{\mu\nu}_{s} (p'_{\nu} - p_{\nu})]u(p). \tag{38}$$

Для частицы спина 0 поток вероятности совпадает с общим потоком вероятности (16), поскольку в этом случае нет вклада спиновой части и матричный элемент (38) равен:

$$c\bar{u}(p')\beta^{\mu}_{s} u(p) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p')(p'^{\mu} + p^{\mu})u(p). \tag{39}$$

В случае спина 1 поток вероятности (38) для свободных частиц с $p'^{\mu} = p^{\mu}$ принимает вид (39), совпадая с общим потоком вероятности (16).

Для заряженных частиц ток взаимодействия с A_{μ} определяется как $e\, j^{\mu}_{s}$ и знак этого тока зависит от комбинации знаков j^{μ}_{s} и $e = \pm|e|$.

Пусть $\Lambda \in O(1,3)$, $\Lambda^{T}\eta\Lambda = \eta$ и $\det\Lambda = \pm 1$, т.е. допустима смена ориентации времени. Тогда ковариантность уравнения ДКП даётся условием (32) на $S_{s}(\Lambda)$. Для $\Lambda = -I$ имеем $x'^{\mu} = -x^{\mu}$, $\partial'_{\mu} = -\partial_{\mu}$. Если существует матрица $S_{(4)}$ такая, что

$$S^{-1}_{(4)} \beta^{\mu}_{s} S_{(4)} = -\beta^{\mu}_{s} \tag{40}$$

то уравнения ДКП инвариантны относительно 4-инверсии. Конкретная реализация $S_{(4)}$ зависит от выбранного представления (5- или 10-мерного).

Дискретные преобразования (включая C, P, T и их комбинации) изучены в литературе для разных взаимодействий [6,12]. При 4-инверсии $\Lambda = -I$ 4-векторы потока вероятности j^{μ}_{s} и тока взаимодействия $e\, j^{\mu}_{s}$ меняют знак. Уравнение непрерывности при этом не меняется: $\partial'_{\mu} j'^{\mu}_{s} = \partial_{\mu} j^{\mu}_{s} = 0$.

ДКП-спинор содержит избыточные компоненты, устраняемые согласованными вспомогательными условиями, возникающими из уравнений ДКП, обеспечивая сведение к уравнениям КГ/Прока и это считается ключевым отличием от уравнения Дирака [6,12]. Эквивалентность наблюдаемых с результатами КГ/Прока при минимальной связи (при корректной интерпретации компонент и учёте связей) и условии массовой поверхности строго доказана, рассматривая S-матрицу для скалярного сектора.

Уравнения ДКП решены для ряда важных потенциалов, таких как осцилляторный и кулоновский, уровни энергии в них в основном совпадают с результатами уравнения КГ/Прока, разница в основном связана с используемыми приближениями.

3.2. Преобразование волновых функций и потока вероятности из системы отсчёта идущей назад во времени в обычную систему

Рассмотрим стандартные соотношения для частиц положительной энергии в ИСО K_{+}, а также, ввиду инвариантности относительно группы преобразований $O(1,3)$, такие же соотношения для частиц отрицательной энергии, но теперь в ИСО K_{-}, идущей назад по оси t. При этом энергии, отрицательные в K_{+}, станут положительными в K_{-}

и наоборот. Координаты K_+ и K_- связаны 4-инверсией и поэтому все соотношения запишем вместе, учитывая, что они относятся к двум ИСО с обратными осями времени.

Волновые функции $\psi_\pm$ удовлетворяют общему и частному волновым уравнениям и преобразуются при 4-инверсии так, чтобы описывать частицы с энергиями двух знаков в двух классах их систем покоя. Мировые линии базисов этих систем отсчёта в начале координат идут в верхний и нижний световые конусы.

При переходе из $K_\pm$ в другую ИСО $K_\pm^{'}$ в том же световом конусе координаты и волновые функции бесспиновой частицы преобразуются как:

$$x_\pm^\mu{}' = \Lambda^\mu_{\nu\pm} x_\pm^\nu + b_\pm^\mu, \tag{41}$$

$$\psi_\pm{}'(x_\pm{}') = \sqrt{\frac{V}{V'}}\,\psi_\pm(\Lambda^\mu_{\nu\pm} x_\pm + b_\pm^\mu). \tag{42}$$

Здесь матрицы $\Lambda^\mu_{\nu\pm}$ образуют две ортохронные группы Лоренца $O_\pm^\uparrow$, включающие собственные и несобственные преобразования Лоренца в двух классах ИСО без инверсии оси времени.

Простейшие решения волновых уравнений - плоские волны:

$$\psi_\pm(x_\pm) = \frac{1}{\sqrt{V}} u(p_\pm) e^{-ip_{\mu\pm}x_\pm^\mu/\hbar} \tag{43}$$

заданы в двух пространствах состояний, где нормированы так, чтобы определять вероятность для соответствующего типа частиц как в (10). Они записаны в координатах внутри своих световых конусов и, в частности, $\psi_-(x_-)$ записана в координатах K_-. Однако, для расчёта амплитуд процессов измеряемые величины и волновые функции надо отнести только к одному типу ИСО, K_+, где и производятся наблюдения, преобразуя из K_- в K_+.

Преобразование из K_- в K_+ в начальный момент $t_{0\pm} = 0$ сведётся к 4-инверсии, когда координаты и 4-импульс меняют знак. В другие моменты $t_{0\pm} \neq 0$ потребуется также и учёт сдвига начала координат по оси времени.

Отметим, что 4-инверсия, будучи «пассивной» операцией, не меняет мировую точку (событие), где задана волновая функция, а лишь выражает его координаты в координатах новой системы отсчёта. Поэтому две части волновой функции с разными знаками энергии запишем для одной и той же мировой точки $x_+^\mu = -x_-^\mu$. Это означает, что если в K_+ волновая функция задана в точке x_+^μ, то в K_- следует рассматривать волновую функцию в точке $-x_-^\mu$. Тогда выражение $-ip_{\mu-}(-x_-^\mu)$ принимает вид $ip_{\mu-}x_-^\mu$ и при 4-инверсии этот скаляр переходит в $ip_{\mu+}x_+^\mu$.

Итак, свободная волновая функция $\psi_-(-x_-)$ при 4-инверсии переходит в $\psi_-(x_+)$, где отличие от $\psi_+(x_+)$ сводится к отличию в знаке $p_\mu x^\mu$:

$$\psi_-(-x_-) \to \psi_-(x), \qquad \psi_\pm(x_\pm) \sim \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(\mp ip_\mu x^\mu/\hbar). \tag{44}$$

Здесь запись переменной без индекса $\pm$ теперь означает, что оно заданы в K_+. В результате, волновые функции для двух знаков энергии в K_+ имеют вид:

$$\psi(x,+E_p)=\frac{1}{\sqrt{V}}u(p)e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar}, \qquad \psi(x,-E_p)=\frac{1}{\sqrt{V}}v(p)e^{ip_\mu x^\mu/\hbar}. \tag{45}$$

При переходе из K_- в K_+ 4-вектор j_-^μ, будучи полярным вектором, меняет знак. Для свободных частиц с $\psi_\pm(x_+)$ и 4-импульсами $p_+^\mu=(\pm E_p/c,\vec{p}_\pm)$, собственные значения компонент потока вероятности в (16), с учётом (13), не зависят от значений $\bar{u}u$, $\bar{v}v$ и равны

$$j_{0\pm}=\pm\frac{1}{V_0}\frac{E_p}{mc}, \quad \vec{j}_\pm=\frac{1}{V_0}\frac{\vec{p}_\pm}{m}. \tag{46}$$

Как видим, знак $j_\pm^0$ совпадает со знаком энергии $p^0=\pm E_p/c$. Вводя в (46) $V_0=VE_p/mc^2$, получаем обычные релятивистские выражения:

$$j_{0\pm}=\frac{\pm c}{V}, \quad \vec{j}_\pm=\frac{c^2}{V}\frac{\vec{p}_\pm}{E_p}=\frac{\vec{v}_\pm}{V}. \tag{47}$$

Рассмотренные преобразования из K_- в K_+ были для векторов «пассивными», когда они не меняются, а меняются оси координат, куда они проецируются. Можно произвести и «активное» преобразование, оставаясь в K_+, когда оси координат неизменны, а меняется знак того или иного вектора. Если это 4-импульс $p^\mu\to -p^\mu$, то такое преобразование является кроссинг-преобразованием и в (45) первая плоская волна переходит во вторую.

Таким образом, в ДКП формализме поток вероятности для свободных частиц, как и должно быть, совпадает с общим потоком вероятности

3.3. Общее и специальные волновые уравнения для калибровочных бозонов

В СМ безмассовыми частицами являются лишь фотоны и глюоны, калибровочные бозоны спина 1, а при включении гравитации также и гравитоны спина 2. При рассмотрении *физических степеней свободы* они выступают как частицы со спиральностью λ, играющей роль сохраняющегося кирального заряда. Если кванты с $\lambda>0$ считать частицами, то такие же кванты со спиральностью $\lambda<0$ ведут себя как их «зарядово-сопряжённые» античастицы.

Свободные глюоны ведут себя как восемь видов фотонов, и лишь при учёте взаимодействий глюонов друг с другом и с кварками проявляется их отличие от фотонов. Аналогичная ситуация и со свободными гравитонами.

В ВС РКМ поэтому фигурируют безмассовые калибровочные бозоны (фотоны и глюоны с $\lambda=1$, и гравитоны с $\lambda=2$) положительной (отрицательной) энергии, которые идут вперёд (назад) во времени. Амплитуды вероятности свободного безмассового бозона, из которых образуются их пропагаторы, удовлетворяют общему волновому уравнению (22) с $m=0$:

$$\partial_\pm^\mu\partial_{\mu\pm}\psi_\pm^\lambda=0, \quad \partial_\pm^\mu\partial_{\mu\pm}\psi_\pm^{\lambda+}=0. \tag{48}$$

Формализм ДКП для безмассовых бозонов аналогичен для бозонов конечной массы, но содержит дополнительные связи, которые не вносят принципиальных изменений в потоки вероятности для свободных частиц. Ввиду чисто технического усложнения этот формализм будет рассмотрен в книге [17].

Несколько иная и нетривиальная картина возникает в электрослабой теории с векторными бозонами ненулевой массы $W^{\pm}$. Они возникают в теории как комбинации изначально безмассовых калибровочных бозонов, которые приобретают эффективную массу в ходе взаимодействия с фоновым скалярным полем (конденсатом). До приобретения массы W^{+} и W^{-} имели противоположные спиральности и заряды, будучи парой частица-античастица. Поэтому и после приобретения массы W^{+} и W^{-} по-прежнему будут иметь противоположные спины и заряды. Таким образом, в ВС РКМ нарушение чётности оказывается связанным с природой $W^{\pm}$ как изначально безмассовых калибровочных бозонов. При этом их продольные компоненты возникают эффективно как результат взаимодействия с фоновым полем, заменяя три компоненты скалярного изодублета.

Время-симметричная теория взаимодействий с калибровочными полями и гравитонами в рамках ВС РКМ будет рассмотрена в последующих публикациях.

4. Время-симметричная теория фермионов спина ½.

4.1. Общее и специальное волновые уравнения для фермионов

Теория бозонов прежней РКМ с уравнением КГ и соответствующим потоком вероятности, в принципе была состоятельной. Но отрицательный знак j^0 при отрицательной энергии ошибочно приписывался самой вероятности и из-за этой неадекватной трактовки теория считалась несостоятельной. В ВС РКМ теория бозонов состоятельна, поскольку знак j^0 трактуется адекватно, как поток положительной вероятности в обратном направлении оси t.

Исторически переход от уравнения КГ к уравнению Дирака объяснялся тем, что надо обеспечить положительность j^0 и для отрицательных энергий и эта проблема считалась решённой при таком переходе. Но по иронии истории, это и сделало теорию Дирака несостоятельной этом вопросе. В ВС РКМ знак j^0 показывает направление потока вероятности по оси времени также и для фермионов уже потому, что это следует из общего потока вероятности, имеющего силу и для свободных фермионов.

В данной части статьи будет изложена теория фермионов спина ½ на базе ВСТО, где ситуация обратная случаю теории бозонов и ВС РКМ впервые ведёт к полностью состоятельной теории фермионов, внеся нужные коррективы в прежнюю теорию Дирака.

Для фермионов спина ½, как и в случае бозонов, приведём стандартные соотношения при положительной энергии в ИСО K_{+} и, ввиду инвариантности относительно 4-инверсии, напишем такие же соотношения в ИСО K_{-} для частиц идущих назад в обычном времени. Соотношения в двух типах ИСО, из-за их идентичности, и в этом случае приведены вместе.

Волновые функции $\psi_{\pm}^{r}$ и $\bar{\psi}_{\pm}^{r} \equiv \psi_{\pm}^{r+}\gamma^{0}$, для частиц спина ½ в K_{+} и в K_{-} являются 4-х рядными спинорами для двух значений спина ($r = 1,2$). Функции действия и лагранжианы для них имеют вид:

$$S_{\pm} = \int d^4x \, \mathrm{L}_{\pm}, \quad \mathrm{L}_{\pm} = c\bar{\psi}_{\pm}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu\pm} - mc)\psi_{\pm}. \tag{49}$$

Отсюда следует уравнение Дирака для спиноров обеих видов, которое является специальным волновым уравнением с первой производной по времени:

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu\pm} - \kappa)\psi_{\pm}^{r} = 0, \quad \bar{\psi}_{\pm}^{r}(i\overleftarrow{\partial}_{\mu\pm}\gamma^{\mu} + \kappa) = 0. \tag{50}$$

Это уравнение ковариантно относительно преобразований (41) из ИСО $K_\pm$ в ИСО $K_\pm^{'}$ в том же световом конусе, а также пространственных отражений матрицей 3-инверсии $P = diag(1,-1,-1,-1)$, образующих ортохронную группу Лоренца. Волновые функции и матрицы Дирака γ^μ преобразуются через матрицы $\tilde{S}(\Lambda_\pm)$, в которые, в дополнение к обычному определению, включим также объёмный фактор:

$$\psi_\pm^{'}(x_\pm^{'}) = \tilde{S}(\Lambda_\pm)\psi_\pm(Px_\pm), \tag{51}$$

$$\tilde{S}^{-1}(\Lambda_\pm)\gamma^\mu \tilde{S}(\Lambda_\pm) = \Lambda^\mu_{\nu\pm}\gamma^\nu, \quad \tilde{S}(\Lambda_\pm) = \sqrt{\frac{V}{V'}}\exp\left(-\frac{i}{4}\omega_\pm\sigma_{\mu\nu}I^{\mu\nu}_{n\pm}\right)\tilde{P}. \tag{52}$$

где $\tilde{P}$ матрица соответствующего представления 3-инверсии, $\omega_\pm$ - «угол поворота» вокруг оси с направлением n , $\sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$ и $I^{\mu\nu}_{n\pm}$ - матрица поворота. При этом соотношение между эрмитово-сопряжённой и обратной матрицами имеет вид:

$$\tilde{S}^{-1} = (V'/V)\gamma^0\tilde{S}^+\gamma^0 = (E_p / E_{p'})\gamma^0\tilde{S}^+\gamma^0. \tag{53}$$

Простейшими решениями уравнений (50) являются плоские волны:

$$\psi_\pm^r(x_\pm) = \frac{1}{\sqrt{V}}u^r_{p_\pm}\exp(\mp ip_{\mu\pm}x^\mu_\pm / \hbar). \tag{54}$$

Спиноры $u^r_{p_\pm}$ проще всего найти в системах покоя частиц двух знаков энергии $K_\pm^{(0)}$. В них уравнения (50) упрощаются и дают собственную волновую функцию:

$$i\gamma^0\partial_{0\pm}\psi^r_{0\pm} = \kappa\psi^r_{0\pm}, \quad i\partial_{0\pm}\bar{\psi}^r_{0\pm}\gamma^0 = -\kappa\bar{\psi}^r_{0\pm}, \tag{55}$$

$$\psi^r_{0\pm} = \frac{1}{\sqrt{V_0}}u^r_{0\pm}\exp(-imc^2t_\pm / \hbar), \tag{56}$$

$$u^1_{0\pm} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T, \quad u^2_{0\pm} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T. \tag{57}$$

Далее, используя (51), преобразуем волновые функции (57) из $K_\pm^{(0)}$ в $K_\pm$:

$$\psi^r_\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}u^r_{p_\pm}\exp(\mp ip_\mu x^\mu / \hbar). \tag{58}$$

Здесь спиноры $u^r_{p_\pm}$ из (54) принимают вид [5,6]:

$$u^1_{p_\pm} = A_\pm\begin{pmatrix}1\\ 0\\ p_{z\pm}/\tilde{p}_\pm\\ (p_{1\pm}+ip_{2\pm})/\tilde{p}_\pm\end{pmatrix}, \quad u^2_{p_\pm} = A_\pm\begin{pmatrix}0\\ 1\\ (p_{1\pm}-ip_{2\pm})/\tilde{p}_\pm\\ -p_{z\pm}/\tilde{p}_\pm\end{pmatrix}, \tag{59}$$

где $\tilde{p}_\pm = mc + E_{p\pm}/c$ и $A_\pm = \sqrt{\tilde{p}_\pm / 2mc}$. Отсюда следуют условия нормировки:

$$\int_V d^3x\psi^{r+}_{p_\pm}\psi^{r'}_{p_\pm} = \frac{E_{p\pm}}{mc^2}\delta^{rr'}, \quad \int_V d^3x\bar{\psi}^r_{p_\pm}\psi^{r'}_{p_\pm} = \delta^{rr'}. \tag{60}$$

Отметим снова, что при определении $V = 1$ во всех системах отсчёта не учитывается то, что билинейное произведение волновых функций есть плотность вероятности. В релятивистской теории инвариантны лишь собственные нормировочные объёмы V_0 и естественна лишь нормировка $V_0 = 1$, что ведёт к $V = mc^2 / E_p$.

Собственные значения f оператора F, как показывает соотношение (13), определяются делением матричного элемента на нормировочный фактор $\bar{\psi}\psi$. Для фермионов отрицательной энергии форма $\bar{\psi}\psi$ нетривиальна, так как $\bar{\psi}$ при переходе из K_- в K_+ меняет знак. Поэтому представление (13) позволят определять собственные значения операторов физических величин вне зависимости от этой специфики спиноров.

4.2. Преобразование волновых функций из системы отсчёта идущей назад во времени в обычную систему

События описанные в двух типах систем отсчёта $K_\pm$ связаны 4-инверсией, которая меняет знаки проекций полярных 4-векторов, в частности, 4-импульса $p_-^\mu \to -p_+^\mu$, 4-вектора плотности потока вероятности $j_-^\mu \to -j_+^\mu$, а также токов взаимодействия. Матрицы преобразования 4-векторов при инверсии оси времени T_v, осей пространственных координат P_v и их произведения, 4- инверсии P_vT_v, имеют вид:

$$(P_v)_{\mu\nu} = -(T_v)_{\mu\nu} = diag(1,-1,-1,-1) = g_{\mu\nu}, \quad P_vT_v = -I, \tag{61}$$

где I - единичная матрица, $g_{\mu\nu}$ - метрический тензор в декартовых координатах в пространстве Минковского. Рассмотрим теперь матрицы преобразований спиноров при инверсии координат P_s, T_s и 4-инверсии P_sT_s. Уравнение Дирака (50) ковариантно при 4-инверсии координат $\partial / \partial x_\mu \to -\partial / \partial x_{\mu-}$ если матрица P_sT_s антикоммутирует с γ^μ, т.е. совпадает с γ^5 (с точностью до фазового фактора, выбираемого равным 1):

$$(P_sT_s)^{-1}\gamma^\mu P_sT_s = -\gamma^\mu, \quad P_sT_s = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5. \tag{62}$$

Матрица преобразования спиноров $\tilde{S}_4(\Lambda_\pm)$ из общей группы Лоренца включает, в дополнение к матрице $\tilde{S}(\Lambda_\pm)$ из (52), матрицу 4-инверсии γ^5:

$$\psi'_\mp(x'_\mp) = \tilde{S}_4(\Lambda_\pm)\psi_\pm(-x_\pm), \tag{63}$$

$$\tilde{S}_4(\Lambda_\pm) = \gamma^5\tilde{S}(\Lambda_\pm) = \gamma^5\sqrt{\frac{V}{V'}}\exp\left(-\frac{i}{4}\omega_\pm\sigma_{\mu\nu}I_{n\pm}^{\mu\nu}\right), \tag{64}$$

$$\tilde{S}_4^{-1}(\Lambda_\pm)\gamma^\mu\tilde{S}_4(\Lambda_\pm) = -\Lambda_{\nu\pm}^\mu\gamma^\nu. \tag{65}$$

Матрица преобразования спиноров при инверсии пространственных координат известна: $P_s = \gamma^0$. Это позволяет найти из (62) матрицу преобразования спиноров при инверсии оси времени T_s (в стандартном представлении):

$$T_s = \gamma^0\gamma^5 = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad T_s^{-1} = T_s^+ = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = -T_s, \quad T_sT_s = -I. \tag{66}$$

Как видим, двукратная инверсия времени, согласно (66), меняет знак волновой функции.

Далее учтём, что две части волновой функции с разными знаками энергии записываются в K_+ для общей мировой точки x_+^μ. Поэтому, как и в случае бозонов, в терминах координат K_- волновую функцию следует брать в точке $-x_-^\mu$, т.е. $\psi_-(-x_-)$.

В прежней стандартной формулировке РКМ операция инверсии оси времени (66) была разделена на две операции, т.е. на:

а) *зарядовое сопряжение* $\psi_c = i\gamma^2\psi^*$, состоящее из комплексного сопряжения и умножения на $C = i\gamma^2$, и

б) *вигнеровское обращение времени*, включающее комплексное сопряжение с перестановкой начальной и конечной состояний, и умножение на матрицу $T_W = i\gamma^1\gamma^3$.

При их совместном применении и добавлении инверсии $t \to -t$ получаем:

$$iT_W[C\psi^*(-t)]^* = -\gamma^1\gamma^3(i\gamma^2)^*\psi(-t) = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi(-t) = T_s\psi(-t), \tag{67}$$

и в итоге оператор инверсии оси времени оказывается таким же как в (66):

$$iCT_W = i\cdot i\gamma^2\cdot i\gamma^1\gamma^3 = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = T_s. \tag{68}$$

При 4-инверсии (62) спиноры для свободной частицы $u_{p_-}^r$, $\bar{u}_{p_-}^r$ переходят в:

$$P_sT_su_{-p_-}^r = \gamma^5u_{-p_-}^r = v_{p_+}^r, \tag{69}$$

$$\bar{u}_{-p_-}^r(P_sT_s)^+ = u_{-p_-}^{r+}\gamma^0\gamma^5 = -u_{-p_-}^{r+}\gamma^5\gamma^0 = -\bar{v}_{p_+}^r, \tag{70}$$

где $\mathbf{p}_+ = -\mathbf{p}_-$ есть 3-импульс в K_+. В деталях преобразование (69) имеет вид:

$$\gamma^5u_{-p_-}^1 = A_-\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-p_{3-}/\tilde{p}\\-(p_{1-}+ip_{2-})/\tilde{p}\end{pmatrix} = A_-\begin{pmatrix}p_{3+}/\tilde{p}\\(p_{1+}+ip_{2+})/\tilde{p}\\1\\0\end{pmatrix} = v_{p_+}^1, \tag{71}$$

$$\gamma^5u_{-p_-}^2 = A_-\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-(p_{1-}-ip_{2-})/\tilde{p}\\p_{3-}/\tilde{p}\end{pmatrix} = A_-\begin{pmatrix}(p_{1+}-ip_{2+})/\tilde{p}\\-p_{3+}/\tilde{p}\\0\\1\end{pmatrix} = v_{p_+}^2. \tag{72}$$

Как видим, 4-инверсия не меняет спиральность частицы.

Итак, для плоской волны (54) имеем $-ip_{\mu-}(-x_-^\mu) = ip_{\mu+}x_+^\mu$ и поэтому:

$$\psi_-^r(x) = P_sT_s\psi_{p_-}^r(-x_-) = \frac{1}{\sqrt{V}}v_{p_+}^r\exp(ip_{\mu+}x_+^\mu/\hbar). \tag{73}$$

Преобразование $\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$:

$$\bar{\psi}_-(x) = \psi_{p_-}^+(-x_-)\gamma^0\gamma^5 = -\psi_{p_-}^+(-x_-)\gamma^5\gamma^0, \tag{74}$$

даёт результат отличающийся знаком от эрмитово сопряжённого (73):

$$\bar{\psi}_-(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}(-\bar{v}_p)\exp(-ip_\mu x^\mu/\hbar). \tag{75}$$

Отсюда следует, что для состояний отрицательной энергии билинейная форма $\bar{\psi}_-\psi_-$ в K_+ выражается через форму $\bar{\psi}\psi$ из K_- со знаком минус: $\bar{\psi}_-\psi_- = -\bar{\psi}_+\psi_+ \sim \bar{v}v$.

Для состояний отрицательной энергии собственных значений f_{PT} операторов физических величин F находим из матричного элемента этого оператора из (13). После 4-инверсии $F_{PT}(x) = \gamma^5 F(-x)\gamma^5$ получаем:

$$f_{PT} = \frac{\bar{\psi}_- F_{PT}(x)\psi_-}{\bar{\psi}_-\psi_-}, \tag{76}$$

Поскольку для фермионов отрицательной энергии форма $\bar{\psi}\psi$ меняет знак при переходе из K_- в K_+, то представление (76) позволяют находить f_{PT} вне зависимости от этой специфики и нормировочных факторов волновых функций фермионов.

В теории Дирака включение части несобственных преобразований, инверсии осей пространственных координат, привело к объединению в один спинор двух спиноров в киральном представлении, «левых» и «правых» спиноров, которые переходят друг в друга при такой пространственной инверсии.

Несобственные преобразования в общей группе Лоренца включают, кроме инверсии осей пространственных координат, также и инверсию оси времени и поэтому её представления двузначные и есть два вида спиноров u_p^r и v_p^r, которые отличаются знаком энергии. Но имеется также однозначное представление, когда два спинора объединяются в один тетраспинор [7]. Тетраспинорное представление кратко рассмотрено в Приложении 8.1 и более детально в [17].

4.3. Лагранжиан, поток вероятности и токи взаимодействия для фермионов отрицательной энергии в обычной системе отсчёта

В теории Дирака плотность потока вероятности имеет вид:

$$j_D^\mu = c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{77}$$

В разложении Гордона для свободных частиц нет спиновой части и оно упрощается, позволяя выразить поток вероятности через собственные значения 4-импульса p^μ:

$$j_D^\mu = \frac{p^\mu}{m}\bar{\psi}\psi. \tag{78}$$

При отрицательной энергии $p^0 < 0$ билинейная форма $\bar{\psi}\psi \sim \bar{v}v < 0$ отрицательна и временная компонента j_D^0 оказывалась положительной. Это считалось достижением теории Дирака, ошибочно полагая, что j_D^0 даёт плотность вероятности напрямую. Кроме того, пространственные компоненты потока вероятности были обратными импульсу $j_D^i \sim -p^i$. С физической точки зрения эти два свойства были абсурдными, так как в релятивистской кинематике знак потока вероятности j^μ должен совпадать со знаком p^μ. Для бозонов данное требование релятивистской кинематики выполняется и поэтому эти следствия теории Дирака свидетельствовали о незавершённости теории фермионов.

В ВС РКМ этих проблем дираковской теории фермионов нет и поток вероятности удовлетворяет указанному требованию. Это отличие от прежней теории следует из того факта, что в поток вместо $\bar{\psi}\psi$ в (78), которая отрицательна при отрицательной энергии, входит $\bar{\psi}_0\psi_0 > 0$, также как в (16). При этом та часть токов взаимодействия, которая соответствует одинаковым импульсам начального и конечного спиноров, является произведением потока вероятности на заряд и также меняет знак при 4-инверсии.

Общий поток вероятности j^μ (16) для свободных фермионов определяется как произведение дрейфовой скорости, пропорциональной $\bar{\psi}\overleftrightarrow{\partial}^\mu\psi/\bar{\psi}\psi$, и инвариантной плотности вероятности в системе покоя $\bar{\psi}_0\psi_0 > 0$:

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2}\frac{\bar{\psi}\,\partial^\mu\psi - (\partial^\mu\bar{\psi})\psi}{\bar{\psi}\psi}\bar{\psi}_0\psi_0 = \frac{p^\mu}{m}\bar{\psi}_0\psi_0 \sim p^\mu. \tag{79}$$

Здесь ∂^μ является диагональным оператором связывающим одну и ту же компоненту волновой функции в начальном и конечном состояниях и поэтому j^μ тоже является диагональным оператором. Так как $\bar{\psi}_0\psi_0 > 0$, то поток вероятности имеет тот же знак, что и 4-импульс и меняет знак при 4-инверсии.

При этом для свободной частицы общая плотность потока вероятности совпадает с той корректной плотностью потока, которая следует из уравнения Дирака при учёте определения этого потока аналогично (79) как:

$$j^\mu = \frac{c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}{\bar{\psi}\psi}\bar{\psi}_0\psi_0 = \frac{p^\mu}{m}\bar{\psi}_0\psi_0 \sim p^\mu. \tag{80}$$

Плотность потока вероятности для частицы отрицательной энергии следует из лагранжиана при учёте объёмного фактора и 4-инверсии спиноров:

$$j_-^\mu = \frac{\delta L_-}{\delta(\partial_\mu\psi_-)}(-i\psi_-) = c\bar{\psi}_-\gamma^\mu\psi_-\frac{V}{V_0} \sim c\bar{v}\gamma^\mu v\frac{V}{V_0}. \tag{81}$$

Используя разложение Гордона поток вероятности выражаем через собственные значения 4-импульса и получаем:

$$j^\mu = c\bar{\psi}_-\gamma^\mu\psi_-\frac{V}{V_0} = \frac{p^\mu}{m}\frac{V}{V_0}\bar{v}v = \frac{p^\mu}{m}\frac{V}{V_0}. \tag{82}$$

Таким образом, и в теории фермионов знаки потока вероятности и 4-импульса одинаковы и удовлетворяются требования ВСТО.

Плотность тока взаимодействия с векторным полем A_μ следует из лагранжиана при учёте объёмного фактора и 4-инверсии спиноров:

$$j_{e-}^\mu = \frac{\delta L_-}{\delta A_\mu} = ce\bar{\psi}_-\gamma^\mu\psi_-\frac{V}{V_0} \sim ce\bar{v}\gamma^\mu v\frac{V}{V_0}. \tag{83}$$

Выражая ток через собственные значения 4-импульса, получаем:

$$j_{e-}^\mu(p',p) = \frac{e}{2m}\bar{v}(p')\left[(p'^\mu + p^\mu) + i(p'^\mu - p^\mu)\sigma^{\mu\nu}\right]v(p) \tag{84}$$

Таким образом, и в теории фермионов знаки тока и 4-импульса одинаковы при значении $e > 0$ и $p'^\mu \simeq p^\mu$, удовлетворяя требованиям ВСТО.

Наличие спина не должно приводить к принципиальному отличию свободных бозонов и фермионов. Поэтому пропорциональность 4-вектора потока вероятности 4-вектору энергии-импульса является естественным и находится в согласии с ВСТО. Спин не играет роли также и в одночастичных задачах со скалярными потенциалами.

Наличие же спиновой части в токах взаимодействия с векторными или тензорными полями также естественно, что и давало результаты, согласующиеся с экспериментом. Но это имеет лишь косвенное отношение к потоку вероятности, выражающему свойства свободных частиц независимо от каких-либо взаимодействий.

4.4. Исключение в ВС РКМ парадоксов теории фермионов

Двумя парадоксальными с физической точки зрения следствиями теории Дирака были парадокс скорости и высокочастотные дрожания фермионов (или зиттербевегунг, zitterbewegung). В ВС РКМ плотность потока вероятности свободных фермионов пропорциональна лишь энергии-импульсу и в ней нет этих двух парадоксов.

Парадокс скорости состоял в том, что в теория Дирака величина 3-скорости фермионов оказывалась равной скорости света. В ВС РКМ этот парадокс отпадает потому, что 4-импульс входит в выражения для потока вероятности точно также, как в релятивистской теории. Очевидно, что при переходе к пределам нерелятивистской квантовой механики и классической релятивистской механики этот поток переходит в выражения с обычной 3-скоростью.

В парадоксе дрожаний фермионов теория Дирака предсказывала в волновых пакетах переходы между состояниями двух знаков энергии $\bar{u}_p^r \gamma^i v_{p'}^{r'}$ и $\bar{u}_p^r \gamma^i v_{p'}^{r'}$ при локализации свободных фермионов в областях порядка комптоновской длины волны [5,6]. Противоречивость этого следствия состояла в трёх обстоятельствах.

В ВС РКМ в плотность потока вероятности свободного фермиона (79) входит лишь 4-импульс, который является чётным оператором, не смешивающим состояния разного знака энергии и здесь нет спиновой части, которая ранее и приводила к такому смешиванию и дрожанию. Это означает, что в ВС РКМ, в согласии с КТП, нет явления дрожания свободных фермионов. Влияние потенциального барьера, запирающего частицу в конечном объёме, приводит к рождению пар, но это результат взаимодействия с запирающим потенциалом и не имеет отношения к состояниям свободной частицы.

Ещё один парадокс теории фермионов – парадокс Клейна, как известно, снимается при учёте рождения пар в сильном поле, т.е. при выходе за пределы одночастичного приближения. Поэтому этот эффект парадоксален лишь в рамках одночастичного приближения и становится обычным эффектом рождения пар при более точном анализе. ВС РКМ, основанная на интерпретации ЗШФ является уже многочастичным подходом и естественным образом включает рождение и аннигиляцию пар. Поэтому в ней этот процесс перестаёт быть парадоксом, что будет показано в разделе 5.1.

Итак, ВС РКМ приводит теорию фермионов в согласие с релятивистской теорией, а также исключает прежние парадоксы.

5. Описание в ВС РКМ взаимодействий частиц

5.1. Решения парадокса Клейна в ВС РКМ и КТП

РКМ была создана на базе одночастичного приближения. Известный парадокс Клейна, возникший в начале создания РКМ, считался демонстрацией недостаточности РКМ для описания процессов взаимодействия частиц, требующих многочастичного подхода, и поэтому считалось, что этот парадокс решается только в рамках КТП с учётом рождения пар в сильном поле [5,6].

Однако, с открытием интерпретации ЗШФ и пропагаторного подхода РКМ стала фактически такой же многочастичной теорией, как и КТП, воспроизводя диаграммную технику и позволяя описывать практически все процессы с частицами, в том числе и рождение пар. Парадокс Клейна как раз и показывает, что парадоксальное явление в одночастичном подходе становится обычным и понятным уже в рамках РКМ при учёте многочастичности процесса простейшим образом, без сложностей теории квантовых полей. Здесь приведём краткое описание решения, а детали приведены в книге [17]. Начиная с этого раздела применяется система единиц $c=1$ и $\hbar=1$.

Пусть бесспиновая частица энергии E свободно движется по оси x при $x<0$, но при $x \geq 0$ имеется потенциальная ступенька высоты V. При слабом поле $V<E-m$ есть прошедшая и отражённая части падающего потока, а при среднем поле $E-m<V<E+m$ весь поток отражается. Процессы в этих режимах такие же, как и в нерелятивистской теории.

В третьем режиме сильного поля с $V>E+m$ в прежней формулировке РКМ с одночастичным приближением возникал парадокс Клейна: рассматривался только один поток исходных частиц, который на барьере делится на две части, уходящие от барьера в противоположные стороны. Отходящий от барьера поток оказывался больше падающего, при этом появлялся ещё отрицательный поток в области ступеньки [5,6].

В ВС РКМ, также как и в КТП, решение парадокса ясно с физической точки зрения: при $V>E+m$ падающий поток полностью отражается, но появляется новый поток рождённых на барьере пар частица-античастица, которые идут во взаимно обратных направлениях.

В КТП для описания процессов в режиме сильного поля нужен динамический подход, так как полная волновая функция в каждой области включает волновые функции частиц и античастиц, входящих в исходный и/или рождённые потоки. В ВС РКМ картина упрощается, так как исходный поток полностью отражается, а дополнительный поток частиц отрицательной энергии приходит из будущего, двигаясь справа налево, на барьере отражается по оси времени, меняя также знак энергии, и уходит снова в будущее.

Итак, сравним три подхода к анализу процесса:

- в прежней РКМ рассматривался только *один* исходный поток, который на барьере делился на две части – отражённую и прошедшую, и возникал парадокс: отражённый поток оказывался больше падающего;
- в ВС РКМ рассматриваются *два* потока: исходный поток, который полностью отражается на барьере, и поток частиц отрицательной энергии справа, который на барьере меняет знак энергии и продолжает идти дальше налево;
- в КТП описываются *три* потока - исходный поток, полностью отражающийся на барьере, и два потока рождённых на барьере пар - рождённых частиц, идущих налево, и соответствующий поток рождённых античастиц, идущий направо.

Физически корректными и не приводящими к парадоксу являются две последние, которые по существу эквивалентны, так как сводятся к одним и тем же диаграммам, однако рассмотрение в ВС РКМ гораздо проще. Это связано с тем свойством ВС РКМ, что потоки частиц и античастиц считаются двумя частями одного потока, у которого при взаимодействии с барьером меняются знаки энергии и направления хода во времени.

5.2. Причинные пропагаторы

В ВС РКМ причинные пропагаторы появляются естественным образом из время-симметричных решений волновых уравнений в присутствии взаимодействий. Для бесспиновой частицы причинный пропагатор G_c есть функция Грина при граничных условиях ЗШФ в K_+, соответствующих распространению вперёд во времени частиц положительной энергии и назад во времени частиц отрицательной энергии.

Для уравнения КГ с источником, представленным током взаимодействия $j(x)$:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = j(x), \tag{85}$$

пропагаторы $G_{c\pm}(x'-x)$ определяются для решений двух знаков энергии как:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)G_{c\pm}(x'-x) = \delta^4(x'-x). \tag{86}$$

Решение (85) в обычном времени при граничных условиях ЗШФ имеет вид:

$$\phi(x') = \phi^{(0)}(x') + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x G_{c+}(x'-x)\, j(x) + \int_{\infty}^{-\infty} dt \int d^3x G_{c-}(x'-x)\, j(x). \quad (87)$$

Здесь $\phi^{(0)}$ есть решение однородного уравнения с этими же граничными условиями, $G_{c+}(x'-x) \sim \theta(t'-t)$ описывает перенос положительной энергии вперёд во времени, а $G_{c-}(x'-x) \sim \theta(t-t')$ - перенос отрицательной энергии назад во времени.

Поскольку пределы второго интеграла по времени в (87) переставлены, то полный причинный пропагатор G_c получим переставив пределы второго интеграла, что изменит знак перед G_{c-}, и (87) принимает более компактный вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x) &= \tilde{\phi}^{(0)}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' [G_{c+}(x-x') - G_{c-}(x-x')]\, j(x') = \\ &= \tilde{\phi}^{(0)}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' G_c(x-x')\, j(x'), \end{aligned} \quad (88)$$

где

$$G_c(x) = G_{c+}(x) - G_{c-}(x). \quad (89)$$

Таким образом, при выражении обратного во времени интеграла через интеграл в прямом направлении причинный пропагатор G_c даётся *разностью* G_{c+} и G_{c-}. Его импульсное представление имеет стандартный вид:

$$G_c(x'-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x'-x)}}{p^2 - m^2c^2 + i\varepsilon}. \quad (90)$$

Причинный пропагатор $S_c(x'-x)$ для частиц со спинами 0,1 и ½ удовлетворяет частному волновому уравнению с точечным источником:

$$(i\hbar\Gamma^\mu\partial_\mu - mc)S_c(x'-x) = \delta^4(x'-x), \quad (91)$$

и, при учёте граничных условий ЗШФ аналогично (88) и (89), принимает обычный вид:

$$S_c(x'-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma^\mu p_\mu + mc}{p^2 - m^2c^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x'-x)}. \quad (92)$$

Оба вида пропагаторов (90) и (92) дают отличные от нуля вероятности перехода с $t' > t$ при положительной энергии и с $t' < t$ для отрицательной энергии.

5.3. Матрица рассеяния и диаграммная техника

В ВС РКМ диаграммная техника в присутствии взаимодействий даёт практически те же конечные результаты, что и прежняя формулировка РКМ [5,6], но более естественным образом, т.е. без прежних проблем и искусственных правил.

Со времени своего создания в 1940-х годах было известно, что формализм теории рассеяния в РКМ становится компактным и ковариантным именно в терминах частиц двух знаков энергии, идущих в разные стороны оси времени. ВС РКМ воспроизводит этот формализм ковариантной теории рассеяния и причинами этого являются следующие обстоятельства:

- причинные пропагаторы, лежащие в основе ковариантной диаграммной техники, следуют из время-симметричных выражений ВС РКМ;

- матричные элементы с античастицами описываются выражениями с частицами отрицательной энергии, которые получаются при 4-инверсии состояний из K_- или кроссинг-преобразовании состояний положительной энергии из K_+.

Обычная *S*-матрица, которая использовалась и в КТП, определялась как амплитуда перехода из состояний в бесконечном прошлом в состояния в бесконечном будущем. Её нетривиальная часть в случае одной вершины является произведением двух амплитуд перехода - из состояний в прошлом в точку взаимодействия в конечный момент $-\infty < t < \infty$ и из состояний в этот момент в состояния в будущем:

$$S_{+-} = \langle \psi(+\infty) | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \psi(-\infty) \rangle. \tag{93}$$

Пример этих процессов – рассеяние на потенциале частицы положительной энергии.

В ВС РКМ есть и другие компоненты *S*-матрицы. Это – переходы состояний:

- из далёкого будущего в состояния в далёком прошлом через конечный момент t:

$$S_{-+} = \langle \psi(-\infty) | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \psi(+\infty) \rangle, \tag{94}$$

в частности, рассеяние на потенциале частицы отрицательной энергии;

- из далёкого будущего в состояния также в далёком будущем:

$$S_{++} = \langle \psi(+\infty) | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \psi(+\infty) \rangle, \tag{95}$$

в частности, рождение пары на том же потенциале;

- из далёкого прошлого в состояния тоже в далёком прошлом:

$$S_{--} = \langle \psi(-\infty) | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \psi(-\infty) \rangle, \tag{96}$$

в частности, аннигиляция пары на том же потенциале.

При рассмотрении простейших процессов с вершинами взаимодействия, но без петлевых диаграмм, т.е. скелетных диаграмм, становится ясными два обстоятельства, которые характерны и для петлевых диаграмм. Во-первых, воспроизводятся результаты прежних расчётов, во-вторых, ВС РКМ ведёт к более компактному формализму из-за время-симметричной формы выражений для частиц двух знаков энергии.

Диаграммы с частицами положительной энергии те же, как и в прежней РКМ, а диаграммы с частицами отрицательной энергии получаются из них:

- 4-инверсией, когда меняются знаки энергии всех частиц, и
- кроссинг-преобразованием, когда меняются знаки энергии отдельных частиц.

Более детально эти вопросы рассмотрены в книге [17].

Итак, ВС РКМ является с формальной точки зрения естественной теоретической основой для эвристического формализма ковариантной теории рассеяния.

6. Гравитационная саморегуляризация петлевых диаграмм на планковских масштабах

6.1. Отсутствие ультрафиолетовых расходимостей при учёте внешнего гравитационного поля системы частиц в петлевой диаграмме

В прежней формулировке релятивистской квантовой теории, в том числе и в пропагаторном подходе РКМ, амплитуды перехода рассматривались, как правило, в пространстве Минковского. При этом петлевые диаграммы в высших порядках теории возмущений содержали ультрафиолетовые расходимости и фактически теория становилась несостоятельной. Перенормировка с заменой расходящихся масс и зарядов на их наблюдаемые значения позволяла как-то обойти проблему на практике, но не решала её. Эта основная проблема теории оставалась нерешённой до недавнего времени [5,6].

В плоском пространстве-времени петлевые диаграммы калибровочных полей, взаимодействующих с фермионами, растут с энергией обрезания Λ логарифмически $a\ln(\Lambda/m)$, где m - масса лёгкого фермиона. До энергии Планка $\Lambda_g \sim 10^{19}$ ГэВ коэффициенты a в случае полей СМ малы $a \ll 1$. Дальнейшая экстраполяция к более высоким энергиям обрезания $\Lambda > \Lambda_g$, без учёта ограничений ОТО, затем и приводила к расходимостям. При включении же гравитации в форме обмена гравитонами на плоском фоне оценки показали, что вклад гравитонов в диаграммы с L-петлями возрастает с ростом Λ как $\sim(\Lambda/\Lambda_g)^{2L+2}$, т.е. однопетлевые диаграммы растут как $\sim(\Lambda/\Lambda_g)^4$ и затем каждая дополнительная петля добавляет к степени роста двойку. Вклад гравитонов поэтому остаётся малым при $\Lambda < \Lambda_g$, но катастрофически расходится при $\Lambda \ge \Lambda_g$.

В действительности оказалось, что проблема ультрафиолетовых расходимостей, как и проблема нулевой энергии, решается без новых гипотез при последовательном учёте требований релятивистской теории, в данном случае ОТО [14]. Физическим механизмом, ведущим к конечности рядов теории возмущений оказалось внешнее гравитационное поле системы частиц в петлевой диаграмме и гравитационное замедление собственных времён частиц в этом поле с застыванием на планковских расстояниях l_g.

В ОТО есть три вида замедления времени:

1) *Инерциальное замедление времени* является относительным и симметричным для двух часов, покоящихся в двух инерциальных системах отсчёта.
2) *Неинерциальное замедление,* растяжение собственного времени неинерциальных часов относительно собственного времени инерциальных часов, абсолютное и асимметричное для этих двух часов, что показывает парадокс часов (близнецов). При сравнении собственного времени двух часов, испытавших разные ускорения, больше отстают те часы, которые ускорялись сильнее и/или дольше.
3) *Гравитационное замедление* - это замедление собственных времён стандартных часов, покоящихся ближе к источнику гравитации, по сравнению с собственным временем более удалённых стандартных часов. Из принципа эквивалентности следует, что гравитационное замедление подобно неинерциальному замедлению и тоже является абсолютным и асимметричным для этих двух часов.

Внешнее гравитационное поле, генерируемое полной энергией системы частиц в петлевой диаграмме, замедляет собственные времена этих частиц относительно времени t глобальной гиперповерхности одновременности, где определена *S*-матрица. Это замедление необратимо и абсолютно, если сравнивать времена двух взаимно покоящихся часов, т.е. удалённых часов и собственных «часов» в системе частиц.

Для понимания причины неудачи прежних попыток учёта гравитации в квантовой теории достаточно привести такую же историю из атомной физики, где надо было учесть электромагнитное поле. В этом случае учёт неквантованной части поля, кулоновского взаимодействия, позволило объяснить дискретность уровней энергии и всю структуру атомов и молекул. Включение квантованной части, обмена фотонами, лишь незначительно сдвинуло кулоновские уровни (Лэмбовский сдвиг). Если бы здесь поступили также, как с гравитацией, «забыв» про кулоновское поле, и попытались бы объяснить структуру атомов только обменом фотонами, то ничего не смогли бы объяснить и описать.

Но именно это и происходило с гравитацией: игнорируя вклад неквантованной части поля, временной компоненты метрики, ведущей к гравитационной регуляризации из-за застывания всех процессов на планковском масштабе, учитывали лишь вклад квантованной части метрики без главного эффекта - гравитационного застывания - и получали катастрофическое нарастание вкладов высоких энергий, т.е. расходимости.

В Приложении 8.2 приведены некоторые детали гравитационного застывания процессов и гравитационной саморегуляризации на планковских масштабах. Далее рассмотрим гравитационную регуляризацию известных взаимодействий в простейшем случае, когда она сведена к обрезанию при инвариантной планковской энергии.

6.2. Гравитационно-регуляризованная СМ и квантовая гравитация.

В данном разделе приведём результаты гравитационной регуляризации в рамках обычной диаграммной техники.

В квантовой электродинамике (КЭД) константы Z_2 и Z_3 являются константами перенормировки пропагаторов электрона (S_c) и фотона (G_c) соответственно: $S_c = Z_2^{-1} S_c^{(0)}$ и $G_c = Z_3^{-1} G_c^{(0)}$. Перенормированные пропагаторы выражаются через собственные энергетические диаграммы. Для фотона такая диаграмма даётся поперечной частью поляризационного оператора $\Pi_{ik}(q^2) = (q_i q_k - q^2 g_{ik})\Pi(q^2)$. Поправка к массе электрона выделяется из собственной энергии $\Sigma(p)$, где $S_c^{-1} = (S_c^{(0)})^{-1} - \Sigma$ и $\Sigma(p) = [\Delta m - (Z_2^{-1} - 1) + C(p)](p - m)$. Из тождества Уорда $\partial\Sigma(p)/\partial p^i = -\Lambda_i(p,p)$, где $\Lambda_i(p,p')$ - вклад вершинной части, следует $Z_1 = Z_2$ для физического заряда получаем $e = e_0 Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{1/2} = e_0 Z_3^{1/2}$ [5].

В простейшем виде гравитационная саморегуляризация петлевых диаграмм сводится к обрезанию импульсных интегралов при инвариантной энергии Планка Λ_g. В КЭД с электронами и фотонами наибольший вклад в константы перенормировки Z_1, Z_2, Z_3 дают однопетлевые диаграммы с электронами в промежуточном состоянии, в которые входят константа связи $\alpha / 4\pi \simeq 0.00058$ и факторы:

$$\ln\frac{\Lambda_g^2}{m_e^2} \simeq 103.056, \quad A_e = \frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{\Lambda_g^2}{m_e^2} \simeq 0.0598\,. \tag{97}$$

Поляризационный оператор $\Pi(q^2)$ (при $q^2 \to 0$) и Z_3, константа перенормировки фотонного пропагатора, имеют значения:

$$\Pi(0) \simeq \frac{4}{3}A_e \simeq 0.0797 \simeq 7.97\%, \quad Z_3 \simeq 1 - \Pi(0) = 0.9203. \tag{98}$$

Они дают для затравочной константы связи α_0 и поправки $\Delta(e^2)$ к e^2:

$$\alpha = Z_3 \alpha_0, \quad \alpha_0 \simeq \frac{\alpha}{0.92} \simeq \frac{1}{126.07} \simeq 0.0079, \tag{99}$$

$$\Delta(e^2) = \Pi(0) e^2 = 0.0797 e^2. \tag{100}$$

Две другие константы перенормировки имеют значения:

$$Z_1^{(1)} = Z_2^{(1)} \simeq (1 + A_e)^{-1} \simeq 0.9436. \tag{101}$$

Для электрона затравочная масса $m_{e(0)}$ тогда равна около 0.85 от физической массы m_e, а разница между ними составляет около $0.15m_e$:

$$m_{e(0)} = m_e(1+3A_e^{(1)})^{-1} \simeq 0.8479m_e = 0.4333\,\mathrm{MeV}, \tag{102}$$

$$\Delta m_e = m_e - m_{e(0)} \simeq 0.1521m_{e(0)} = 0.0777\,\mathrm{MeV}. \tag{103}$$

Петлевые вклады высших порядков в КЭД также остаются малыми, и во всех случаях гравитационная регуляризация приводит к достаточно малым поправкам к наблюдаемым. Вычисления разными методами констант $Z_i^{(n)}$ для n -петлевых диаграмм показывают, что в КЭД теория возмущений сходится.

В СМ, основанной на группе симметрии $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ и спонтанном нарушении симметрии со скалярным конденсатом, петлевые диаграммы конечны при энергии регуляризации Λ_g. Для калибровочных полей они малы из-за логарифмической зависимости от Λ_g и асимптотической свободы. В электрослабой теории и КХД петлевые поправки сводятся к модификации эффективных констант в логарифмических множителях. На обычных расстояниях их константы связи больше α, но уменьшаются на малых расстояниях, и вблизи l_g становятся меньше α. В результате ряды теории возмущений сходятся.

Вклады треугольных диаграмм с фермионными пропагаторами и псевдовекторной вершиной растут с энергией обрезания Λ линейно и ведут к киральным аномалиям. При гравитационной регуляризации вклад таких диаграмм конечен, но порядка $\sim\Lambda_g$. Поскольку такие большие вклады недопустимы, критерием состоятельности моделей физики частиц по-прежнему остаётся взаимное сокращение киральных аномалий, что и имеет место в СМ. Гравитационная регуляризация делает ситуацию с киральными аномалиями в СМ рациональной, так как взаимно сокращаются конечные величины.

Регуляризация петлевых вкладов собственным внешним гравитационным полем через метрику g_{00} с обрезанием при Λ_g происходит также и в квантовой гравитации в пропагаторном подходе к теории возмущений. Взаимодействия через поперечные компоненты гравитационного поля, описываются соответствующими пропагаторами. Представляя гравитоны как особых частиц приходим к выводу, что их присутствие в системе частиц-источников усиливает гравитационное замедление собственных времён.

Размерная константа связи в квантовой гравитации $G\sim 1/\Lambda_g^2$ приводит к степенным вкладам петлевых диаграмм с гравитонами $\sim(\Lambda/\Lambda_g)^{2L+2}$. Но, в отличие от скалярного поля, эффективная константа связи $(\Lambda/\Lambda_g)^2<1$ мала вплоть до Λ_g. Однопетлевые вклады порядка $(\Lambda/\Lambda_g)^4$ малы при $\Lambda<\Lambda_g$, а вкладами многопетлевых диаграмм, где каждая петля добавляет двойку к степени роста, можно пренебречь. Таким образом, теория возмущений остаётся справедливой при $\Lambda<\Lambda_g$, квантовая гравитация оказывается конечной и теория возмущений, по всей видимости, сходится.

Итак, гравитационная регуляризация, следующая из гравитационного замедления времени приводит к конечному пределу для энергии регуляризации $\Lambda\to\Lambda_g$, который оказывается достаточным для конечности и перенормируемости калибровочных полей СМ и квантовой гравитации.

В этой ситуации проблематичным остаётся только скалярный сектор, введённый для спонтанного нарушения симметрии. Петлевые интегралы для скалярного поля растут как Λ^n с $n>1$, что ведёт к конечным, но неприемлемо большим вкладам в наблюдаемые порядка Λ_g^n. Поэтому либо скалярная частица составная с эффективным полем, либо в СМ должен быть иной механизм генерации массы. Переход к формализму ДКП, а также пересмотр роли скалярного поля в квантовой теории могут изменить ситуацию в этом вопросе и это будет предметом дальнейших исследований.

Итак, теория возмущений в теории калибровочных полей СМ и в квантовой гравитации с гравитационной регуляризацией при Λ_g конечны и теории состоятельны, так как вычисленные значения наблюдаемых не только конечны, но и достаточно малы.

7. Обсуждения и заключение

ВСТО, сформулированная в первой статье [8], основана на общей группе Лоренца $O(1,3)$ включающей инверсию оси t и в ней античастицы описываются как частицы отрицательной энергии, которые идут, вместе со своими системами покоя, назад во времени t.

Построение РКМ на базе ВСТО ведёт к ВС РКМ, в которой основные проблемы и противоречия прежней формы РКМ отпадают, а новая ВС РКМ становится последовательной и состоятельной физической теорией в области применимости РКМ.

Основными результатами ВС РКМ, описанными в статье, являются следующие:

1. Вероятности положительны, а поток вероятности частиц отрицательной энергии отрицателен из-за направления потока против оси обычного времени.
2. Это исправляет ошибку прежней теории бозонов РКМ, где отрицательный знак потока вероятности приписывался вероятности, и в ВС РКМ теория бозонов впервые стала полностью состоятельной;
3. Этим исправлена и обратная ошибка в теории Дирака, в которой знак потока вероятности при отрицательной энергии положителен из-за нормировочного фактора, хотя собственные значения потока отрицательные, как и требует ВСТО, и в ВС РКМ теория фермионов стала полностью состоятельной тоже впервые;
4. В ВС РКМ трансляционная симметрия и гамильтон-якобиевский формализм ведут к общему волновому уравнению для компонент волновых функций всех свободных частиц, в котором релятивистский гамильтониан фигурирует квадратично, а уравнение КГ, дифференциальная форма этого уравнения, выражая связь энергии с импульсом, также становится универсальной;
5. Среднее от 4-импульса и поток вероятности, следующие из уравнения КГ, тоже становятся общими и описывают движение всех свободных частиц;
6. Линеаризация релятивистского гамильтониана ведёт к специальным волновым уравнениям с первыми производными (уравнениям ДКП для спина 0, 1 и уравнению Дирака для спина ½), включающие смешивание компонент волновых функций и описывающие спин и взаимодействия;
7. Из этих специальных уравнений следуют специальные потоки вероятности, дрейфовые части которых, описывая свободные частицы, совпадают с общим потоком вероятности, но есть также спиновые части и части с потенциалами;
8. Граничные условия ЗШФ ведут к причинным пропагаторам частиц;
9. Пропагаторный подход с время-симметричными амплитудами перехода и причинными пропагаторами ведёт к обычной диаграммной технике;

10. ВС РКМ учитывает требуемое ОТО внешнее гравитационное поле, созданное полной энергией системы частиц в любой петлевой диаграмме;
11. Это внешнее поле ведёт к гравитационному замедлению собственных времён с застыванием на планковской длине, гравитационном радиусе системы частиц;
12. Такое застывание ведёт к гравитационной регуляризации петлевых диаграмм, делая ряды теории возмущений в пропагаторном подходе конечными;
13. Эффективные константы связи квантовой гравитации и калибровочных полей СМ малы при допланковских энергиях и поэтому эти теории перенормируемы;
14. Степенной рост петлевых вкладов скалярного поля до планковских масштабов свидетельствует о том, что это поле эффективное, а их частица составная.

Всё это демонстрирует тот факт, что ВС РКМ, включая пропагаторный подход, с её наглядным и практичным формализмом, свободным от противоречий, становится в такой же мере состоятельной наукой, как и КТП, давая более простое и физически более ясное описание процессов с частицами.

Более детальное изложение ВС РКМ будет дано в книге [17]. В третьей статье [15] рассмотрены основы время-симметричной КТП на базе ВСТО.

8. Приложения

8.1. Объединение спиноров в тетраспинор

Поскольку 4-инверсия переводит u_p^r в v_p^r и наоборот, то в ВС РКМ недостаточно рассматривать эти спиноры отдельно. Отражение оси времени ведёт к их смешиванию и поэтому объединим их в один *тетраспинор* [7]:

$$w_p^r = \begin{pmatrix} u_p^r \\ v_p^r \end{pmatrix}. \tag{104}$$

Тогда четыре уравнения Дирака для двух видов спиноров с $r = 1, 2$:

$$(\gamma^\mu p_\mu - \kappa) u_p^r = 0, \qquad (-\gamma^\mu p_\mu - \kappa) v_p^r = 0 \tag{105}$$

принимают вид двух уравнений для двух видов тетраспиноров:

$$(\tau_3 \Gamma^\mu p_\mu - \kappa) w_p^r = 0, \tag{106}$$

где матрицы Γ^μ имеют вид:

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & -\gamma^\mu \end{pmatrix} = \gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{107}$$

Решения для двух знаков энергии $w_{p\pm}^r$:

$$w_{p+}^r = \begin{pmatrix} u_p^r \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_{p-}^r = \begin{pmatrix} 0 \\ v_p^r \end{pmatrix} \tag{108}$$

переходят друг в друга при 4-инверсии при действии матрицы 4-инверсии Γ^5:

$$\Gamma^5 \begin{pmatrix} u_p^r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_p^r \end{pmatrix}, \qquad \Gamma^5 \begin{pmatrix} 0 \\ v_p^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_p^r \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^5 \\ \gamma^5 & 0 \end{pmatrix} = \gamma^5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{109}$$

Тетраспиноры вводились ранее для внутренних степеней свободы, в частности изоспина.

8.2. Внешнее гравитационное поле частиц в петлевой диаграмме и гравитационная саморегуляризация на планковском масштабе

В системе из двух и более взаимодействующих частиц, в частности, в петлевых диаграммах пропагаторного подхода РКМ, полная энергия системы генерирует в каждый момент времени t внешнее гравитационное поле вокруг центра инерции системы. Это поле замедляет локальные собственные времена квантов τ относительно t, что приводит к гравитационному красному смещению этих частот $\nu = \nu_0 g_{00}^{1/2}$ [14]. В этом Приложении возвращаемся к естественным единицам, явно показывая c и $\hbar$.

Гравитационное замедление, как и замедление в парадоксе часов, не является кажущимся эффектом и на гиперповерхности $t = const$ частицы имеют действительно более низкие частоты $\nu < \nu_0$, чем частоты ν_0 удалённых частиц. По мере уменьшения области локализации частиц ν достигает максимального значения $\nu_{\max} < \nu_g = \Lambda_g / h$ вблизи l_g и затем быстро уменьшается из-за сильного гравитационного красного смещения (ν_g-частота Планка). В двухчастичной системе красное смещение мало на расстояниях между частицами $\sim 3l_g$, а на бóльших расстояниях $r \geq 3l_g$ влияние гравитации слабое, и применима стандартная РКМ.

Вклад в амплитуды процессов в интервале $l_g \leq r \leq 3l_g$ мал и составляет малую поправку к основному вкладу от области $3l_g \leq r \leq \infty$. Гравитационный радиус двухчастичной системы, возникшей в промежуточном состоянии однопетлевой диаграммы, порядка $r_g \sim 2G \cdot 2h\nu / c^4$. При оценке достаточно использовать метрику Шварцшильда, которая даёт для красного смещения частоты ($\bar{\nu}_g \equiv \nu_g / 2$):

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} \simeq \nu_0 \left(1 - \frac{2G}{c^2}\frac{2h\nu}{c^2}\frac{\nu}{c}\right)^{1/2} = \nu_0 \left(1 - \frac{\nu^2}{\bar{\nu}_g^2}\right)^{1/2} \tag{110}$$

и локальная частота ν_0 и частота ν в терминах t становятся связанными в виде:

$$\nu_0 \simeq \frac{\nu}{(1-\nu^2/\bar{\nu}_g^2)^{1/2}}, \quad \nu \simeq \frac{\nu_0}{(1+\nu_0^2/\bar{\nu}_g^2)^{1/2}}. \tag{111}$$

Даже при $\nu_0 \gg \bar{\nu}_g$ для наблюдаемых частот каждой из частиц однопетлевой диаграммы $\nu < \bar{\nu}_g$, т.е. полная энергия двухчастичной системы стремится к планковской энергии, что ведёт к застыванию квантовых флуктуаций из-за близости к l_g расстояний между частицами. По этой причине в петлевых диаграммах интегрирование по ν_0 в интервале $(0,\infty)$ заменяется, используя (111), интегрированием в конечном интервале $(0,\nu_g)$ с верхним пределом ν_g. Дифференциалы, с учётом (111), принимают вид:

$$d(\nu_0^2) \simeq \frac{d(\nu^2)}{(1-\nu^2/\bar{\nu}_g^2)^2}, \quad d(\nu^2) \simeq \frac{d(\nu_0^2)}{(1+\nu_0^2/\bar{\nu}_g^2)^2}. \tag{112}$$

Во втором слагаемом (112) интегралы по ν_0 явно сходятся за счёт множителя ν_0^{-4} и при $\nu_0 \gg \bar{\nu}_g$ все ν в интегралах стремятся к постоянному значению $\nu \to \bar{\nu}_g$.

Фактически, гравитационная регуляризация ранее использовалась неявно как регуляризация Паули-Вилларса, когда пропагаторы частиц были заменены на:

$$\frac{1}{p^2 - m^2c^2} \to \frac{1}{p^2 - m^2c^2} - \frac{1}{p^2 - M^2c^2} = \frac{1}{p^2 - m^2c^2} \cdot \frac{1}{1 - p^2 / M^2c^2}. \qquad (113)$$

В однопетлевых диаграммах замена обеих пропагаторов, как в (113), вводит в интеграл множитель p^{-4}, что эквивалентно замене (112).

Итак, при гравитационном застывании всех процессов вблизи l_g и энергии Λ_g события в области $l \le l_g$ или $E_p > \Lambda_g$ не происходят за конечный интервал мирового времени удалённых наблюдателей $t < \infty$ и не вносят вклада в S-матрицу.

Ограничения ОТО запишем в виде *правил гравитационной саморегуляризации*:

1. *В амплитуды перехода дают вклады только процессы в системах частиц с энергиями* $E_p < \Lambda_g$ *при расстояниях между частицами* $l > l_g$.
2. *Обрезание при* l_g *или* Λ_g *петлевых поправок без эффектов гравитации даёт верхние пределы для поправок с эффектами гравитации* $\Delta m_{\max}$, $\Delta e^2_{\max}$.
3. *Физические масса* m *и заряд* e^2 *есть суммы нижних пределов для затравочных значений* m_{0min}, e^2_{0min} *и верхних пределов для петлевых поправок* $\Delta m_{\max}$, $\Delta e^2_{\max}$:

$$\begin{aligned} m &= m_0 + \Delta m = (m_0 - \delta m) + (\Delta m + \delta m) = m_{0min} + \Delta m_{\max}, \\ e^2 &= e_0^2 + \Delta e^2 = (e_0 - \delta e^2) + (\Delta e^2 + \delta e^2) = e^2_{0min} + \Delta e^2_{\max}. \end{aligned} \qquad (114)$$

Уточнения расчётов приведут к перераспределению малых добавок к затравочным значениям и петлевым поправкам. Если вклад верхних пределов в общее значение петлевой поправки мал и достаточен для сходимости ряда теории возмущений, то дальнейшие уточнения ведут только к уменьшению абсолютных значений поправок, что приведёт к ещё более быстрой сходимости ряда теории возмущений.

Литература

1. Dirac P.A.M (1930) Proc. Roy. Soc. (L.) **A126**, 360.
2. Зисман Г. (1940) ЖЭТФ **10** 1163; (1941) **11** 631; *Теория античаст*. (дисс. сент.1941) 66 с. см. Зисман Г., Тодес О. (1970) *Курс общей физики*. т. 3, Н.
3. Stueckelberg E. (1941) *Helv. Phys. Acta* **14**, 588.
4. Feynman R. (1949) *Phys. Rev*. **76**, 749.
5. Бьёркен Дж., Дрелл С. (1978) *Релятивистская квантовая теория*. т. 1. М.
6. Greiner W. (1996) *Relat. Quant. Mech. Wave Eq*. Spr.
7. Гельфанд И., Минлос Р., Шапиро З. (1958) *Предст. группы вращ. и группы Лоренца*. Н.
8. Закир З. (2025) *Квант. и грав. физ.* **6**:028-9128.
9. Petiau G. (1936) *Univ. Paris: Thesis.* In *Acad. R. Belg.* ***A*** *Sci. M. Coll.*, 1936, 16(2).
10. Duffin R. Y. (1938) *Phys. Rev*. **54**, 1114.
11. Kemmer N. (1939), Proc. Roy. Soc. **A173**, 91.
12. Боголюбов Н., Ширков Д. (1976) *Введ. в теорию квант. полей*. Н.
13. Feshbach H., Villars F. (1958) *Rev. Mod. Phys*. **30**, 24.
14. Закир З. *Квант. и грав. физ.* (2020) **1**:002-7128; (2021) **2**:015-7613.
15. Закир З. (2026) *Квант. и грав. физ.* **7**:030-9200.
16. Закир З. *Квант. и грав. физ.* (2023) **4**:026-8400; (2024) **5**:027-8433.
17. Закир З. (2025) *Время-симметричные релятив. и квантовая теории*. ЦТФА, Т.