КВАНТОВАЯ И ГРАВИТАЦИОННАЯ ФИЗИКА
1:001, 36 с., 07.07.2020[1]; doi: 10.9751/KGF.1-001.7128
ISSN 2181-0478; EISSN 2181-0494

Конечная квантовая теория полей и струн. 1. Последовательное квантование в трактовке Штюкельберга-Фейнмана

Захид Закир [2]

Аннотация

В стандартной формулировке квантовой теории поля, где свободные кванты имеют только положительную энергию, операторы античастиц вводились «вручную» и это приводило к расходящейся нулевой энергии, означавшей несостоятельность теории. В трактовке же Штюкельберга-Фейнмана (ШФ) античастицы положительной энергии описываются как частицы отрицательной энергии, идущие назад во времени и лагранжианы не обязательно ведут к нулевой энергии. Но ранее считалось, что эта трактовка ведёт к отрицательной норме состояний и поэтому тоже несостоятельна. В статье сформулирован последовательный метод канонического квантования полей и струн в трактовке ШФ, где корректный выбор функции действия делает нормы состояний положительными, а выбор минимального классического лагранжиана делает свободным и от нулевой энергии. Введено симметричное хронологическое произведение операторов, переходящее в хронологическое при эволюции вперёд и антихронологическое при эволюции назад во времени. Это ведёт к причинному пропагатору ШФ и к обычной диаграммной технике для взаимодействующих полей. Теории струн, содержащие нулевые энергии мод, несостоятельны, так как на планковских расстояниях в них регуляризация недопустима из-за неизбежного присутствия гравитации. Но при квантовании струн в трактовке ШФ есть модели без нулевой энергии, которые поэтому конечны и допустимы, но у них нет аномалии и критической размерности. Эффекты, приписывавшиеся нулевой энергии (лэмбовский сдвиг, эффект Казимира), объясняются вкладами полей реальных источников и подтверждают отсутствие нулевой энергии вакуума. Это частично решает проблему космологической постоянной. Перейти от трактовки ШФ к античастицам можно с помощью зарядовой или кроссинг симметрий. Обсуждены следствия предложенного последовательного метода квантования полей и струн.

Ключевые слова: методы квантования, квантовая теория поля, нулевая энергия, космологическая постоянная, античастицы, составные модели, хронологическое упорядочение, пропагаторы, теория струн, конформная аномалия, высшие измерения

Содержание

---

[1] С исправлениями от 7 февраля 2021.

[2] *Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент Узбекистан*, zzakir@qgph.org, ORCID

Введение

При первых же попытках формулировки релятивистской квантовой теории стало ясно, что состояния обеих знаков энергии входят в неё на одинаковых основаниях. По этой причине Дирак предложил идею трактовать кванты отрицательной энергии как некий способ описания положительно-энергетических античастиц [1]. Эта идея затем подтвердилась с открытием позитрона и других античастиц. Присутствие античастиц сделала теорию многочастичной и даже полевой и поэтому квантовой теорией релятивистских систем стала квантовая теория поля (КТП).

Но состояния с отрицательной энергией вели к двум серьёзным проблемам, каждая из которых делала теорию несостоятельной. Первая - это безостановочное падение частиц в эти состояния. Гипотеза о заполненном вакууме и дырках в нём, как реализация идеи Дирака, решала эту проблему для фермионов [1], но потерпела крах в случае бозонов [2]. Второй была проблема отрицательных вероятностей, так как обычное квантование приводило к отрицательной норме для таких состояний [3].

Поэтому для того, чтобы КТП была последовательной физической теорией, эти проблемы должны были быть преодолены. Но они казались нерешаемыми и поэтому как стандартная была принята компромиссная формулировка, оперирующая только с частицами и античастицами положительной энергии. К сожалению, это привело к новой проблеме с ещё более катастрофическими следствиями. Оказалось, что правдоподобный анзац, состоящий в замене операторов отрицательно-энергетических частиц операторами античастиц, порождал нулевую энергию вакуума, при этом даже когда формулировка с отрицательными энергиями её не содержала. Стандартная формулировка КТП поэтому предсказывала расходящуюся нулевую энергию, что делало эту теорию по существу несостоятельной.

Формальный обход этой проблемы путём игнорирования расходящейся части энергии вакуума (рецептом «нормального упорядочения») не спасает теорию, так как учёт гравитации неизбежен на малых расстояниях с флуктуациями большой энергии. В частности, это ведёт к проблеме (точнее, катастрофе) космологической постоянной. Многочисленные попытки исключить нулевую энергию введением различных гипотез оказались в итоге безуспешными не только потому, что не имели экспериментальной основы, а в основном потому, что создавали ещё больше проблем, которые были, как правило, ещё более безнадёжными.

По этой причине было много попыток вернуться к исходной картине с частицами обеих знаков энергии, каким-то способом решив старые проблемы с отрицательными энергиями. К сожалению, непоследовательности в этих попытках приводили к нереалистичным гипотезам для преодоления их нежелательных последствий, что создало впечатление о нереалистичности всего этого направления.

Непоследовательности допускались математического и/или физического характера. Основной математической проблемой была отрицательность нормы состояний с отрицательной энергией. Причина этого недоразумения была найдена и устранена Павшичем в 1998 г. [4]. Он стартовал с лагранжиана и соответствующего гамильтониана с обеими знаками и показал, что в этом случае нормы всех состояний остаются положительными. Но в [4], как и во многих других попытках, имела место непоследовательность в физической трактовке состояний отрицательной энергии.

В то же время, последовательная физическая трактовка таких состояний была открыта ещё в 1940-е гг. Штюкельбергом и Фейнманом (ШФ) [5,6]. В трактовке ШФ частицы отрицательной энергии формально идут только назад во времени и описывают античастицы положительной энергии, идущие только вперёд во времени. Переход обычных частиц в состояния с отрицательной энергией тогда соответствует аннигиляции пары частица-античастица с положительной энергией.

В статье излагается новый метод последовательного квантования систем с состояниями обеих знаков энергии, в котором общность канонического формализма КТП сочетается с преимуществами трактовки ШФ. Формализм вначале аналогичен [4] и поэтому все состояния имеют положительную норму, но состояния с отрицательной энергией трактуются согласно ШФ. Важным оказалось и то, чтобы свойство состояний разного знака энергии идти в обратных направлениях времени было учтено начиная с функции действия. Всё это частично меняет формализм теории и, так как некоторые лагранжианы не ведут к нулевой энергии, наконец-то делает КТП математически корректной и физически состоятельной теорией.

Одним из изменений в формализме является введение симметричного по времени хронологического произведения операторов, которое переходит в обычное хронологическое произведение [7] при эволюции вперёд и в антихронологическое при эволюции назад во времени. Такие произведения дают причинный пропагатор ШФ и ведут к стандартной диаграммной технике для взаимодействующих полей.

Теории релятивистских струн в прежних трактовках содержат расходящиеся вклады нулевой энергии основного состояния и поэтому эти теории также были несостоятельными, так как на малых расстояниях регуляризация невозможна из-за неизбежного присутствия гравитации на планковских расстояниях. К тому же, в этих теориях нулевые энергии приводили к аномалии и центральному заряду, а требование их сокращения давало критическую размерность пространства-времени [8]. В новом методе квантования по ШФ минимальные лагранжианы не ведут к нулевой энергии и теория струн становится состоятельной и простой, но в которой уже нет конформной аномалии и критической размерности.

Также будет показано, что ряд эффектов, такие как лэмбовский сдвиг и эффект Казимира, приписывавшиеся нулевым флуктуациям [9,10], на самом деле полностью объясняются вкладами полей реальных источников - петлевыми поправками и силами Ван дер Ваальса. Нулевые флуктуации вакуума же не проявились ни в одном эксперименте, так как почти удвоили бы их результаты. Их отсутствие, следующее из квантования по ШФ, подтверждено экспериментами.

Всё это показывает, что последовательное квантование в трактовке ШФ ведёт к конечной и состоятельной квантовой теории свободных полей и струн. Показаны два способа перехода от трактовки ШФ к картине античастиц – первый на основе зарядовой (C) симметрии, а второй – с помощью кроссинг-симметрии.

В разделе 1 описано квантование в рамках трактовки ШФ и метод применён к гармоническим осцилляторам с обеими знаками энергии. В разделах 2 и 3 метод применён к полям и получены их причинные пропагаторы. В разделе 4 приведены два способа перехода к картине античастиц и в разделе 5 обсуждаются следствия отсутствия нулевой энергии для квантовых полей. В разделе 6 сформулирована последовательная теория струн без нулевой энергии мод. В приложениях приведены описание в квантовой механике осциллятора с двумя знаками энергии, а также то, что нулевая энергия ведёт к аномалии и критической размерности в теории струн.

1. Квантование систем с двумя знаками энергии в трактовке ШФ

1.1. Трактовка Штюкельберга-Фейнмана состояний с двумя знаками энергии

Описание эволюции физической системы во времени от начального момента t_0 до конечного момента t_1 начинается с построения функции действия S, определяемого как интеграл по времени от функции Лагранжа L:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \tag{1}$$

При этом обычно подразумевалось, что эволюция идёт только вперёд во времени и поэтому конечный момент находился в будущем по отношению к t_0, т.е. $t_1 > t_0$. Именно так описывается система из частиц и античастиц положительной энергии с лагранжианами $L_+(q_+, \dot{q}_+)$ и $L_{a+}(q_{a+}, \dot{q}_{a+})$ соответственно, где L_+ выражен в терминах обобщённых координат и скоростей частиц $q_+, \dot{q}_+$, а L_{a+} - переменных античастиц $q_{a+}, \dot{q}_{a+}$. Эволюция здесь идёт только вперёд во времени, т.е. от настоящего момента t_0 к будущему моменту t_1 и поэтому направление интегрирования в выражении для действия S надо зафиксировать с помощью ступенчатой функции $\theta(t_1 - t_0)$:

$$S = \theta(t_1 - t_0)\int_{t_0}^{t_1} L_+ dt + \theta(t_1 - t_0)\int_{t_0}^{t_1} L_{a+} dt. \tag{2}$$

Однако, в релятивистской теории введение двух видов объектов, частиц и античастиц, оказывается не обязательным, так как есть возможность иметь дело лишь с одним видом объектов, например, с частицами, что гораздо удобнее. Античастицы формально ведут себя как те же частицы, но с отрицательной энергией идущие назад во времени, и это свойство лежит в основе трактовки ШФ [5,6]. Эта трактовка оказалась естественной и очень удобной в физике частиц.

Трактовка ШФ рассматривает эволюцию одного типа объектов в обеих направлениях времени, т.е. конечный момент может быть и в прошлом, т.е. $t_1 < t_0$. В этом более общем случае интеграл в (1) будет представлять собой сумму из двух членов, где в первом интегрирование идёт от настоящего момента t_0 в будущее $t_1 > t_0$, а во втором – от настоящего в прошлое $t_1 < t_0$.

В отличие от первоначальной и последующих формулировок трактовки ШФ, в данной статье основная идея этой трактовки будет реализована уже начиная с функции действия, т.е. построения корректного выражения для неё как интеграла по времени от лагранжиана.

Для этого в (2) во втором интеграле t_1 представим как $t_1 = t_0 + \Delta t$, где $\Delta t > 0$ и проделаем следующие операции, не меняющие функцию действия:

а) переставим пределы интеграла, что меняет знак перед интегралом;

б) используя трансляционную симметрию, сдвинем оба предела интеграла вниз на Δt, т.е. вычтем Δt;

в) введём лагранжиан частиц отрицательной энергии, приравняв его лагранжиану античастиц с обратным знаком, т.е. $L_-(q_-, \dot{q}_-) = -L_{a+}(q_{a+}, \dot{q}_{a+})$:

$$\int_{t_0}^{t_1} L_{a+}dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} L_{a+}dt = -\int_{t_0+\Delta t}^{t_0} L_{a+}dt = \int_{t_0}^{t_0-\Delta t} (-L_{a+})dt = \int_{t_0}^{t_0-\Delta t} L_- dt; \tag{3}$$

г) аналогичные изменения произведём и в ступеньчатой функции перед вторым интегралом в (2) и переобозначим $t_1 = t_0 - \Delta t$:

$$\theta(t_1 - t_0) = \theta(t_0 + \Delta t - t_0) = \theta[t_0 - (t_0 - \Delta t)] \to \theta(t_0 - t_1) \tag{4}$$

В итоге функция действия (2) приобретает вид требуемый трактовкой ШФ:

$$S = \theta(t_1 - t_0)\int_{t_0}^{t_1} L_+ dt + \theta(t_0 - t_1)\int_{t_0}^{t_1} L_- dt. \tag{5}$$

Во втором члене (5) $t_1 < t_0$ и интегрирование по времени идёт по существу в обратном направлении, от настоящего (t_0) в прошлое (t_1).

Отметим, что выбор частиц условен, так как можно было бы поступить и наоборот, выразив всё в терминах античастиц, считая, что частицы есть античастицы отрицательной энергии, идущие назад во времени, и формула (2) перешла бы в:

$$S = \theta(t_0 - t_1)\int_{t_0}^{t_1} L_{a-} dt + \theta(t_1 - t_0)\int_{t_0}^{t_1} L_{a+} dt. \tag{6}$$

Основное требование трактовки ШФ – это взаимно обратная эволюция во времени состояний с разными знаками энергии. Для свободной релятивистской частицы, имеющей также и античастицу, классическая функция действия имеет вид:

$$S = -\theta(t_1 - t_0)mc^2\int_{t_0}^{t_1} dt\sqrt{1 - \mathbf{v}_+^2 / c^2} + \theta(t_0 - t_1)mc^2\int_{t_0}^{t_1} dt\sqrt{1 - \mathbf{v}_-^2 / c^2}. \tag{7}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для $S = S_+ + S_-$ имеет вид:

$$\frac{\partial S_\pm}{\partial t} + H_\pm = 0, \tag{8}$$

$$H_\pm = \pm\frac{mc^2}{\sqrt{1-\mathbf{v}_\pm^2/c^2}} = \pm\sqrt{\mathbf{p}_\pm^2 + m^2c^4}, \quad \mathbf{p}_\pm = \frac{\partial L_\pm}{\partial \mathbf{v}_\pm} = \pm\frac{m\mathbf{v}_\pm}{\sqrt{1-\mathbf{v}_\pm^2/c^2}}, \quad \mathbf{v}_\pm = \frac{\pm d\mathbf{r}_\pm}{\pm dt}. \tag{9}$$

Отметим, что в $\partial_t S$ производная $\partial_t \theta(t-t_0)$ даёт δ-функцию $\delta(t-t_0)$, но умножается на интеграл, исчезающий при $t = t_0$.

Для правильного понимания и применения трактовки ШФ важны следующие факты, которые обычно недостаточно ясно освещаются в литературе.

1) Трактовка ШФ не означает, что частицы с отрицательной энергией реально существуют, а как раз наоборот, что их в природе нет, а есть античастицы положительной энергии, которые при описании в терминах частиц формально изображаются как состояния с отрицательной энергией. Мировая линия же частицы отрицательной энергии, направленная назад во времени, представляет собой лишь способ описания мировой линии античастицы, направленной вперёд во времени.

2) Если теория сформулирована в терминах частиц обеих знаков энергии с соблюдением направления эволюции во времени согласно трактовке ШФ, то наблюдаемые этой теории прямо связываются с экспериментальными данными и для этого нет нужды её переформулировать в терминах античастиц. Достаточно знания того факта, что начальное состояние отрицательно-энергетической частицы с $-p_\mu$ изображает конечное состояние античастицы с $+p_\mu$ и наоборот.

3) Трактовка ШФ лежит в основе физики частиц и в частности из неё следует перекрёстная (или кроссинг) симметрия, существенно упрощающая описание множества «родственных» в указанном смысле процессов. По этой симметрии конец линии в диаграмме Фейнмана в верхнем световом конусе, изображающей частицу, можно переводить на нижний световой конус с изменением знака 4-импульса $p_\mu \to -p_\mu$ и тогда эта линия, формально изображая частицу идущую назад во времени, фактически будет описывать античастицу положительной энергии, идущую вперёд во времени.

4) Если в конечных матричных элементах всё же хотим перейти на язык античастиц, то для этого достаточно аккуратно произвести кроссинг-преобразование этих матричных элементов, произведя нужные эрмитовы сопряжения произведений операторов с перестановкой начальных и конечных состояний.

5) Трактовка ШФ относится как к квантовой, так и к классической теории, при этом не только к релятивистским системам, но и к нерелятивистским, если в них наряду с частицами есть и античастицы. Нерелятивистский позитрон можно описать как нерелятивистский электрон отрицательной энергии, идущий назад во времени, соответствующим образом изменяя формализм механики и квантовой механики.

1.2. Осцилляторы с вещественными координатами имеют нулевую энергию

Рассмотрим гармонический осциллятор с двумя типами координат $q_\pm$ соответствующим состояниям двух знаков энергии. Эта модель описывает систему из частицы и античастицы в гармоническом потенциале в трактовке ШФ.

Функция действия такого осциллятора даётся (5), где лагранжианы теперь принимают вид ($\dot{x} = dx/dt$):

$$L_+ = \frac{m}{2}(\dot{x}_+^2 - \omega^2 x_+^2), \quad L_- = -\frac{m}{2}(\dot{x}_-^2 - \omega^2 x_-^2), \tag{10}$$

что и было изучено в [4]. Для канонических импульсов отсюда следуют выражения:

$$p_+ = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_+} = m\dot{x}_+, \quad p_- = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_-} = -m\dot{x}_- . \tag{11}$$

Отметим, что импульс состояния с отрицательной энергией содержит знак минус, что далее и сделает коммутаторы лестничных операторов положительными, а значит будут положительными как нормы состояний, так и соответствующие вероятности.

Гамильтонианы для двух мод приобретают вид:

$$H_+ = p_+\dot{x}_+ - L_+ = \frac{1}{2m}[p_+^2 + (m\omega)^2 x_+^2], \tag{12}$$

$$H_- = p_-\dot{x}_- - L_- = -\frac{1}{2m}[p_-^2 + (m\omega)^2 x_-^2]. \tag{13}$$

Соответствующие канонические уравнения:

$$\dot{p}_+ = -\frac{\partial H_+}{\partial x_+} = -m\omega^2 x_+, \quad \dot{p}_- = -\frac{\partial H_-}{\partial x_-} = m\omega^2 x_- , \tag{14}$$

после подстановки (11), дают одинаковые уравнения движения для обеих мод:

$$\ddot{x}_+ + \omega^2 x_+ = 0, \quad \ddot{x}_- + \omega^2 x_- = 0 . \tag{15}$$

Их решения также аналогичны и отличаются лишь знаком при ωt:

$$x_+ = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(a_+ e^{-i\omega t} + a_+^* e^{i\omega t}\right), \quad x_- = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(a_- e^{i\omega t} + a_-^* e^{-i\omega t}\right), \tag{16}$$

$$p_+ = \frac{-im\omega}{\sqrt{2m\omega}}\left(a_+ e^{-i\omega t} - a_+^* e^{i\omega t}\right), \quad p_- = \frac{-im\omega}{\sqrt{2m\omega}}\left(a_- e^{i\omega t} - a_-^* e^{-i\omega t}\right). \tag{17}$$

При квантовании коммутационные соотношения:

$$[x_+, p_+] = i, \quad [x_-, p_-] = i , \tag{18}$$

дают коммутаторы для лестничных операторов, ненулевые из которых есть:

$$[a_+, a_+^*] = 1, \quad [a_-, a_-^*] = 1 . \tag{19}$$

Среднее по основному состоянию от коммутаторов (19) даёт норму для первого возбуждённого состояния, которая положительна для квантов обеих знаков энергии:

$$\langle 0 | [a_\pm, a_\pm^*] | 0 \rangle = \langle 0 | a_\pm a_\pm^* | 0 \rangle = \langle 1_\pm | 1_\pm \rangle = 1. \tag{20}$$

В прежних формулировках трактовки ШФ, где лагранжиан L_- был положительно-определённым, коммутатор был отрицательным $[a_-, a_-^*] = -1$ и это приводило к отрицательной норме $\langle 1_- | 1_- \rangle = -1$, что означало несостоятельность такой теории. В развиваемой же в данной статье формулировке L_- отрицательно-определённый и поэтому как коммутатор, так и норма положительны: $[a_-, a_-^*] = 1$, $\langle 1_- | 1_- \rangle = 1$.

Основные состояния для обеих мод определяются аналогично:

$$a_+ |0\rangle = 0, \quad a_- |0\rangle = 0. \tag{21}$$

Отсюда следуют одинаковые уравнения для основных состояний $\psi_{0\pm}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(m\omega x_\pm + \frac{\partial}{\partial x_\pm}\right)\psi_{0\pm} = 0, \tag{22}$$

соответственно одинаковый вид имеют и решения, нормированные на единицу:

$$\psi_{0\pm} = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2} x_\pm^2\right), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{0\pm}^2 dx_\pm = 1. \tag{23}$$

Гамильтонианы (12)-(13) и их собственные значения тогда приобретают вид:

$$H_+ = \frac{\omega}{2}(a_+^* a_+ + a_+ a_+^*) = \omega\left(a_+^* a_+ + \frac{1}{2}\right), \;\; E_{n+} = \omega\left(n_+ + \frac{1}{2}\right), \tag{24}$$

$$H_- = -\frac{\omega}{2}(a_-^* a_- + a_- a_-^*) = -\omega\left(a_-^* a_- + \frac{1}{2}\right), \;\; E_{n-} = -\omega\left(n_- + \frac{1}{2}\right), \tag{25}$$

где $n_\pm = 0,1,2...$ - собственные значения операторов числа квантов $N_\pm = a_\pm^* a_\pm$.

Если бы мы оставались в картине частиц и античастиц с функцией действия (2), то вместо (25) получили бы гамильтониан для антикванта как аналог (24):

$$H_{a+} = \frac{\omega}{2}(a_{a+}^* a_{a+} + a_{a+} a_{a+}^*) = \omega\left(a_{a+}^* a_{a+} + \frac{1}{2}\right), \;\; E_{a,n+} = \omega\left(n_{a+} + \frac{1}{2}\right). \tag{26}$$

Нулевые энергии квантов и антиквантов положительны и складываясь дают полную энергию основного состояния, в два раза большую, чем у квантов:

$$H = H_+ + H_{a+} = \omega(a_+^* a_+ + a_{a+}^* a_{a+} + 1), \;\; E_{n+,an+} = \omega(n_+ + n_{a+} + 1). \tag{27}$$

Переход же к картине ШФ с частицами отрицательной энергии не меняет функцию действия и при подстановке (25) в (5) с учётом (13) нулевые энергии обеих мод также складываются и удваивают энергию основного состояния. Это происходит потому, что подынтегральные функции можно суммировать лишь при одинаковых пределах интегрирования, т.е. после того, как переставлены пределы и тем изменён знак второго интеграла в (5), что компенсирует знак в (25). Тем самым теория внутренне самосогласованна, так как обе картины, как с античастицами, так и с отрицательно-энергетическими частицами, дают один и тот же результат, что нулевая энергия антикванта удваивает энергию основного состояния.

Итак, теория гармонического осциллятора, расширенная с включением отрицательно-энергетических состояний, самосогласованна и совместима с трактовкой ШФ, где знаки энергии и направления эволюции частицы одинаковы.

1.3. Осцилляторы с комплексными координатами без нулевой энергии

Пусть теперь гармонические осцилляторы с состояниями двух знаков энергии описываются комплексными координатами $q_\pm, q_\pm^*$. В функции действия таких осцилляторов (5) лагранжианы двух видов состояний выберем в виде:

$$L_\pm = \pm m(\dot{q}_\pm^* \dot{q}_\pm - \omega^2 q_\pm^* q_\pm). \tag{28}$$

Канонические импульсы и гамильтониан тогда приобретают вид:

$$p_{\pm} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\pm}} = \pm m\,\dot{q}_{\pm}^{*}, \quad p_{\pm}^{*} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\pm}^{*}} = \pm m\,\dot{q}_{\pm}, \tag{29}$$

$$H_{\pm} = p_{\pm}\dot{q}_{\pm} + \dot{q}_{\pm}^{*}p_{\pm}^{*} - L_{\pm} = \pm\frac{1}{m}(p_{\pm}p_{\pm}^{*} + m^{2}\omega^{2}q_{\pm}^{*}q_{\pm}). \tag{30}$$

Из-за знака минус в отрицательно-энергетических импульсах коммутаторы лестничных операторов и вероятности будут положительными. Уравнения движения

$$\ddot{q}_{\pm} + \omega^{2}q_{\pm} = 0, \quad \ddot{q}_{\pm}^{*} + \omega^{2}q_{\pm}^{*} = 0 \tag{31}$$

ведут к частотным разложениям координат:

$$\begin{aligned} q &= q_{+} + q_{-} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(a_{+}e^{-i\omega t} + a_{-}e^{i\omega t}), \qquad q_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}a_{\pm}e^{\mp i\omega t}, \\ q^{*} &= q_{+}^{*} + q_{-}^{*} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(a_{+}^{*}e^{i\omega t} + a_{-}^{*}e^{-i\omega t}), \qquad q_{\pm}^{*} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}a_{\pm}^{*}e^{\pm i\omega t}, \end{aligned} \tag{32}$$

Здесь q, в отличие от (16), включает вместо a_{+}^{*} оператор a_{-}, так как иначе q не был бы комплексным, тогда как a_{+}^{*} входит в выражение для q^{*}. Импульсы имеют вид:

$$\begin{aligned} p &= p_{+} + p_{-} = \frac{im\omega}{\sqrt{2m\omega}}(a_{+}^{*}e^{i\omega t} + a_{-}^{*}e^{-i\omega t}), \qquad p_{\pm} = \frac{im\omega}{\sqrt{2m\omega}}a_{\pm}^{*}e^{\pm i\omega t}, \\ p^{*} &= p_{+}^{*} + p_{-}^{*} = \frac{-im\omega}{\sqrt{2m\omega}}(a_{+}e^{-i\omega t} + a_{-}e^{i\omega t}), \qquad p_{\pm}^{*} = \frac{-im\omega}{\sqrt{2m\omega}}a_{\pm}e^{\mp i\omega t}, \end{aligned} \tag{33}$$

т.е. $p = im\omega q^{*}$ и $p^{*} = -im\omega q$. Лестничные операторы определены как:

$$a_{\pm} = \frac{e^{\pm i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega q_{\pm} + ip_{\pm}^{*}), \qquad a_{\pm}^{*} = \frac{e^{\mp i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega q_{\pm}^{*} - ip_{\pm}). \tag{34}$$

Квантование ведёт к коммутаторам:

$$[q, p] = i, \quad [q^{*}, p^{*}] = i, \quad [a_{\pm}, a_{\pm}^{*}] = 1. \tag{35}$$

Операторы разного знака энергии коммутируют, так как действуют в разных пространствах состояний. Эти состояния обеих типов осцилляторов определяются действием соответствующих лестничных операторов на их основные и возбуждённые состояния $|n_{\pm}\rangle$ с $n_{\pm} = 0, 1, 2, \ldots$:

$$a_{\pm}|0_{\pm}\rangle = 0, \quad a_{\pm}|n_{\pm}\rangle = \sqrt{n_{\pm}}\,|n_{\pm} - 1\rangle, \quad a_{\pm}^{*}|n_{\pm}\rangle = \sqrt{n_{\pm} + 1}\,|n_{\pm} + 1\rangle, \ \ldots \tag{36}$$

Гамильтонианы $H_{\pm}$ и операторы числа квантов $N_{\pm}$ приобретают вид:

$$\begin{aligned} H &= H_{+} + H_{-} = \omega(a_{+}^{*}a_{+} - a_{-}^{*}a_{-}), \\ N &= N_{+} + N_{-} = a_{+}^{*}a_{+} + a_{-}^{*}a_{-}. \end{aligned} \tag{37}$$

Как видим, при выборе минимального лагранжиана (28), гамильтониан (37) не содержит нулевой энергии в основном состоянии.

Переход от кванта отрицательной энергии к антикванту положительной энергии не меняет этого вывода. Действительно, такой переход производится в функции действия (5) с перестановкой пределов интеграла по времени, что компенсирует отрицательный знак лагранжиана. Отметим, что кроссинг-симметричное преобразование линии на диаграмме, описывающей этот процесс, не меняет численное значение энергии квантов:

$$\left|\langle 0_- | H_- | 0_- \rangle\right| = \langle 0_{a+} | H_{a+} | 0_{a+} \rangle. \tag{38}$$

Итак, теория комплексного гармонического осциллятора с минимальным лагранжианом (28), имеющая отрицательно-энергетические состояния, в рамках трактовки ШФ самосогласованна и состоятельна. При этом в ней нет нулевой энергии как в картине частиц обеих знаков энергии, так и в картине частиц и античастиц положительной энергии.

2. Квантование по ШФ релятивистских полей без нулевой энергии

2.1. Вещественное скалярное поле с нулевой энергией

Прежде чем перейти к комплексным полевым функциям, которые по аналогии с осциллятором с комплексной координатой могут не иметь нулевой энергии, рассмотрим вещественное поле, которое, как и вещественный осциллятор, имеет нулевую энергию. Это поле может описывать в физике частиц лишь составные частицы, а в конденсированных состояниях – квазичастицы и квазиантичастицы.

Для вещественного скалярного релятивистского поля ϕ функция действия в трактовке ШФ (5) включает лагранжианы $L_\pm$ для двух видов состояний поля, аналогичные цепочке комплексных осцилляторов:

$$L_\pm = \pm\frac{1}{2}\int d^3x[(\partial^\mu\phi_\pm)^2 - m^2\phi_\pm^2]\,. \tag{39}$$

Соответствующие гамильтониан и обобщённые импульсы поля равны:

$$H_\pm = \pm\frac{1}{2}\int d^3x[\pi_\pm^2 + (\nabla\phi_\pm)^2 + m^2\phi_\pm^2], \tag{40}$$

$$\pi_\pm(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_t\phi_\pm)} = \pm\partial_t\phi_\pm. \tag{41}$$

Уравнения поля и одновременные коммутаторы полей имеют вид:

$$(\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\phi = 0, \tag{42}$$

$$[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{x}',t)] = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{43}$$

Решения уравнений ведут к частотным разложениям полевых функций и импульсов:

$$\phi_+ = \sum_k (a_k e^{-ikx} + a_k^* e^{ikx}), \quad \phi_- = \sum_k (a_{-k} e^{ikx} + a_{-k}^* e^{-ikx}), \tag{44}$$

$$\pi_+ = -i\sum_k \omega_k (a_k e^{-ikx} - a_k^* e^{ikx}), \quad \pi_- = -i\sum_k \omega_k (a_{-k} e^{ikx} - a_{-k}^* e^{-ikx}), \tag{45}$$

где $k = (\omega_\mathbf{k}, \mathbf{k})$, $\omega_\mathbf{k} = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$, и $\sum_k = \int d^3k[(2\pi)^3 2\omega_k]^{-1/2}$.

Подставив (44)-(45) в (43) получаем коммутаторы для операторов рождения-уничтожения квантов поля обеих знаков энергии, ненулевые из которых есть:

$$[a_k, a_{k'}^*] = [a_{-k}, a_{-k'}^*] = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{46}$$

Энергия поля (40) выражается через эти операторы в виде:

$$H_+ = \frac{1}{2}\int d^3k\,\omega_k (a_k^* a_k + a_k a_k^*) = \int d^3k\,\omega_k \left(a_k^* a_k + \frac{1}{2} \right), \tag{47}$$

$$H_- = -\frac{1}{2}\int d^3k\,\omega_k (a_{-k}^* a_{-k} + a_{-k} a_{-k}^*) = -\int d^3k\,\omega_k \left(a_{-k}^* a_{-k} + \frac{1}{2} \right). \tag{48}$$

Вакуумы определяются как $a_k\left|0\right\rangle = 0$, $a_{-k}\left|0\right\rangle = 0$ и нормы всех состояний положительны. Как и у гармонического осциллятора с состояниями обеих знаков энергии в разделе 1.2, нулевые энергии двух типов состояний, частиц и античастиц, положительны и складываются.

2.2. Комплексные скалярное и векторное поля

Энергия p_0 квантов релятивистского скалярного поля ϕ, в отличие от нерелятивистского случая, связана с импульсом $\mathbf{k}$ релятивистским соотношением и полный набор решений уравнений поля включает состояния с обеими знаками энергии $p_{0\pm} = \pm\omega_{\mathbf{k}}$. Частицы с p_{0-} в трактовке ШФ идут назад во времени и описывают античастицы с p_{0+} идущие вперёд во времени.

По этой причине релятивистские поля в общем случае описываются комплексными полевыми функциями. Это так даже в случае полей с истинно нейтральными частицами, так как истинная нейтральность в этом случае означает лишь практическую неразличимость частиц и античастиц.

Для комплексного скалярного релятивистского поля ϕ с функцией действия в трактовке ШФ (5) лагранжианы для двух видов состояний поля можно выбрать как минимальные:

$$L_\pm = \pm\int d^3x\,(\partial_\mu \phi_\pm^* \cdot \partial^\mu \phi_\pm - m^2 \phi_\pm^* \phi_\pm)\ . \tag{49}$$

Соответствующие гамильтониан, оператор заряда и импульсы равны:

$$\begin{aligned} H_\pm &= \pm\int d^3x\,(\pi_\pm \pi_\pm^* + \nabla\phi_\pm^* \cdot \nabla\phi_\pm + m^2 \phi_\pm^* \phi_\pm), \\ Q_\pm &= \pm i\int d^3x\,(\phi_\pm^* \pi_\pm^* - \pi_\pm \phi_\pm), \end{aligned} \tag{50}$$

$$\pi_\pm(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \phi_\pm)} = \pm\partial_t \phi_\pm^*,\quad \pi_\pm^*(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \phi_\pm^*)} = \pm\partial_t \phi_\pm. \tag{51}$$

Уравнения поля и одновременные коммутаторы полей имеют вид:

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\phi = 0\ ,\quad (\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\phi^* = 0\ . \tag{52}$$

$$[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{x}',t)] = [\phi^*(\mathbf{x},t), \pi^*(\mathbf{x}',t)] = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{53}$$

Решения уравнений поля ведут к частотным разложениям полевых функций:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_+ + \phi_- = \sum_k (a_k e^{-ikx} + a_{-k} e^{ikx}), \quad \phi_\pm = \sum_k a_{\pm k} e^{\mp ikx}, \\ \phi^*(x) &= \phi_+^* + \phi_-^* = \sum_k (a_k^* e^{ikx} + a_{-k}^* e^{-ikx}), \quad \phi_\pm^* = \sum_k a_\pm^* e^{\pm ikx}, \end{aligned} \tag{54}$$

и канонические импульсы поля имеют вид:

$$\pi(x) = \pi_+ + \pi_- = i\sum_k \omega_k (a_k^* e^{ikx} + a_{-k}^* e^{-ikx}), \qquad \pi_\pm = i\sum_k \omega_k a_\pm^* e^{\pm ikx},$$
$$\pi^*(x) = \pi_+^* + \pi_-^* = -i\sum_k \omega_k (a_k e^{-ikx} + a_{-k} e^{ikx}), \quad \pi_\pm^* = -i\sum_k \omega_k a_{\pm k} e^{\mp ikx}, \tag{55}$$

Подставив (54)-(55) в (53) получаем коммутаторы для операторов рождения-уничтожения квантов поля обеих знаков энергии, ненулевые из которых есть:

$$[a_k, a_{k'}^*] = [a_{-k}, a_{-k'}^*] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{56}$$

Энергия и заряд поля (50) выражаются через эти операторы в виде:

$$H = H_+ + H_- = \int d^3k (a_k^* a_k - a_{-k}^* a_{-k})\,\omega_k,$$
$$Q = Q_+ + Q_- = \int d^3k (a_k^* a_k + a_{-k}^* a_{-k}). \tag{57}$$

Операторы уничтожения определяют вакуумы для обеих типов частиц:

$$a_k |0\rangle = 0, \quad a_{-k} |0\rangle = 0, \tag{58}$$

которые, в отличие от вещественного скалярного поля, не содержат нулевой энергии и нулевого заряда из-за выбранного вида лагранжианов (49).

Итак, операторы наблюдаемых комплексного скалярного поля в картине ШФ нормально упорядочены, а энергия и заряд вакуума равны нулю.

Комплексное векторное поле разлагается по нормальным модам также, как и комплексное скалярное поле, но с учётом вектора поляризации $\varepsilon_{\mu k}^{\lambda}$:

$$B_\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} (a_{k\lambda} \varepsilon_{\mu k}^{\lambda} e^{-ikx} + a_{-k\lambda} \varepsilon_{\mu k}^{\lambda *} e^{ikx}),$$
$$B_\mu^*(x) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} (a_{k\lambda}^* \varepsilon_{\mu k}^{\lambda *} e^{ikx} + a_{-k\lambda}^* \varepsilon_{\mu k}^{\lambda} e^{-ikx}). \tag{59}$$

После выделения независимых степеней свободы уравнения для свободного поля для трёх поляризаций линейны и в каждой системе отсчёта квантуются независимо как три комплексных скалярных поля. Поэтому гамильтониан и оператор заряда векторного поля имеют вид:

$$H = \sum_\lambda \int d^3k\, (a_{k\lambda}^* a_{k\lambda} - a_{-k\lambda}^* a_{-k\lambda})\,\omega_k,$$
$$Q = \sum_\lambda \int d^3k\, (a_{k\lambda}^* a_{k\lambda} + a_{-k\lambda}^* a_{-k\lambda}), \tag{60}$$

которые также не содержат нулевой энергии и нулевого заряда.

Хотя этот результат получен в одной системе отсчёта, отсутствие нулевой энергии и нулевого заряда вакуума не зависит от выбора системы отсчёта.

2.3. Поле фотонов

Рассмотрим функцию действия (5) в трактовке ШФ для электромагнитного поля. Лагранжианы для полей $A_\pm^\mu$ обеих знаков энергии ($k^0 = \pm\omega_{\mathbf{k}}$) имеют вид:

$$L_\pm = \mp\frac{1}{4}\int d^3x\, F_{\mu\nu}^{\pm} F_\pm^{\mu\nu} = \pm\frac{1}{2}\int d^3x\, \partial_\mu A_\pm^\nu \cdot \partial^\mu A_{\nu\pm}, \tag{61}$$

где $F_\pm^{\mu\nu} = \partial^\mu A_\pm^\nu - \partial^\nu A_\pm^\mu$ и использовано стандартное условие $\partial_\mu A_\pm^\mu = 0$.

В плоской волне спиральность, временная компонента дивергенции полного момента $\Lambda^{\mu} = \partial_{\nu} J^{\mu\nu}$, есть проекция спина $\mathbf{S}$ на направление импульса: $\Lambda^0 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{k} / |\mathbf{k}|$. При квантовании волны с круговой поляризацией и с двумя проекциями спиральности образуют чистые состояния поля фотонов, при которых диагональны гамильтониан и Λ^0.

Пусть в системе покоя источника фотонов пространственная ось x^3 направлена по импульсу фотона $\mathbf{k} = (0, 0, k^3)$ и пусть выбрана калибровка $A_3 = 0$, оставляющая лишь поперечные физические компоненты A_1, A_2. При введении комплексной полевой функции A:

$$A(x) = (A_1 + iA_2) / \sqrt{2}, \quad A^*(x) = (A_1 - iA_2) / \sqrt{2}. \tag{62}$$

лагранжиан (61) принимает вид лагранжиана комплексного скалярного поля и мы здесь тоже выбираем его в «минимальной» форме:

$$L_{\pm} = \pm \int d^3x \; \partial_{\mu} A_{\pm}^* \cdot \partial^{\mu} A_{\pm}. \tag{63}$$

Свободный гамильтониан и спиральность тогда имеют вид:

$$\begin{aligned} H_{\pm} &= \pm \int d^3x (\pi_{\pm} \pi_{\pm}^* + \nabla A_{\pm}^* \cdot \nabla A_{\pm}), \\ \Lambda_{\pm}^0 &= \pm i \int d^3x (A_{\pm}^* \pi_{\pm}^* - \pi_{\pm} A_{\pm}), \end{aligned} \tag{64}$$

где $\pi_{\pm}(x) = \pm \partial_t A_{\pm}^*$, $\pi_{\pm}^*(x) = \pm \partial_t A_{\pm}$. Фотоны с противоположными спиральностями $\Lambda^0 = \pm 1$ ведут себя как состояния с противоположного знака (киральными) зарядами, а симметрия между фотонами противоположной спиральности есть аналог зарядовой (C) симметрии.

Уравнения поля и одновременные коммутаторы полей имеют вид:

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} A = 0, \quad \partial_{\mu} \partial^{\mu} A^* = 0. \tag{65}$$

$$[A(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = [A^*(\mathbf{x}, t), \pi^*(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{66}$$

Разложим поле по нормальным модам:

$$A(x) = \sum_k (a_k e^{-ikx} + a_{-k} e^{ikx}), \quad A^*(x) = \sum_k (a_k^* e^{ikx} + a_{-k}^* e^{-ikx}), \tag{67}$$

$$\pi(x) = i \sum_k \omega_k (a_k^* e^{ikx} + a_{-k} e^{-ikx}), \quad \pi^*(x) = -i \sum_k \omega_k (a_k e^{-ikx} + a_{-k}^* e^{ikx}). \tag{68}$$

Здесь $a_{\pm k}$, $a_{\pm k}^*$ - операторы рождения-уничтожения фотонов с положительной спиральностью $\Lambda_+^0 = +1$, коммутаторы для которых следуют из (66) и ненулевые из которых есть:

$$[a_k, a_{k'}^*] = [a_{-k}, a_{-k'}^*] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{69}$$

Гамильтониан и спиральность (64), с учётом (67)-(68), приобретают вид:

$$\begin{aligned} H &= H_+ + H_- = \int d^3k (a_k^* a_k - a_{-k}^* a_{-k}) \omega_k, \\ \Lambda_{\pm}^0 &= \Lambda_+^0 + \Lambda_-^0 = \int d^3k (a_k^* a_k + a_{-k}^* a_{-k}). \end{aligned} \tag{70}$$

Операторы уничтожения определяют вакуум: $a_k|0\rangle = 0$, $a_{-k}|0\rangle = 0$, который не содержит нулевой энергии, спиральность вакуума также равна нулю. Из-за инвариантности свойств вакуума факт зануления энергии вакуума в одной системе отсчёта и в одной калибровке имеет место для всех систем отсчёта и калибровок.

Описанную процедуру квантования поля фотонов в системе покоя источника можно обобщить на произвольные инерциальные системы отсчёта и представить в лоренц-ковариантном виде, сохраняя аксиальную симметрию системы, путём введения тетрадных векторов:

$$A_1 = e_1^\mu A_\mu, \quad A_2 = e_2^\mu A_\mu, \quad e_0^\mu A_\mu = e_3^\mu A_\mu = 0, \tag{71}$$

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1^\mu + ie_2^\mu)A_\mu = e_+^\mu A_\mu, \quad A^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1^\mu - ie_2^\mu)A_\mu = e_-^\mu A_\mu. \tag{72}$$

При этом, поле фотонов, имеющее две поперечные физические компоненты $(0, A_1, A_2, 0)$ в системе покоя источника, после преобразования Лоренца в другие системы отсчёта в общем случае может иметь все четыре компоненты $A_\mu = e_\mu^1 A_1 + e_\mu^2 A_2$. Продольная компонента появляется из-за другой ориентации пространственных осей координат новой системы отсчёта, а временная компонента – из-за преобразований Лоренца проекций (A_1, A_2) на направление движения новой системы отсчёта. В пропагаторы фотонов будут входить ковариантные выражения:

$$e_\mu^- e_\nu^+ A(\Lambda x')A^*(\Lambda x) = e_\mu^a e_\nu^b A_a(\Lambda x')A_b(\Lambda x) = A_\mu(x')A_\nu(x). \tag{73}$$

Поскольку тетрадные векторы (e_μ^1, e_μ^2) постоянны и являются кинематическими факторами, они вносят лишь кинематические поправки к процедуре квантования и не меняют физических результатов, в частности, не порождают нулевую энергию.

2.4. Фермионное поле

В релятивистской теории поле фермионов со спином 1/2 описывается спинорами Дирака $\psi_\pm^+, \psi_\pm$ и в ковариантной формулировке имеет состояния двух знаков энергии. В функции действия (5) лагранжианы этих состояний имеют вид:

$$L_\pm = \int d^3x \left(\frac{i}{2}[\bar\psi_\pm \gamma^\mu(\partial_\mu \psi_\pm) - (\partial_\mu \bar\psi_\pm)\gamma^\mu \psi_\pm] - m\bar\psi_\pm \psi_\pm \right). \tag{74}$$

В отличие от бозонного случая, здесь нет необходимости в подстановке знака минус в L_-, так как появление в дальнейшем отрицательных собственных значений гамильтониана заложено в конструкции спиноров $\bar\psi_-, \psi_-$ и матриц γ^μ.

Роль канонического импульса поля играет сопряжённый спинор:

$$\pi_\pm = \frac{\partial L_\pm}{\partial(\partial_t \psi_\pm)} = i\psi_\pm^+. \tag{75}$$

Гамильтониан и оператор заряда приобретают вид:

$$H_\pm = \frac{i}{2}\int d^3x\, [\psi_\pm^+(\partial_t \psi_\pm) - (\partial_t \psi_\pm^+)\psi_\pm], \quad Q_\pm = \int d^3x\, \psi_\pm^+ \psi_\pm. \tag{76}$$

Соответствующие уравнения Дирака и их решения есть:

$$\gamma^\mu i\partial_\mu \psi_\pm - m\psi_\pm = 0, \tag{77}$$

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi_+ + \psi_- = m\sqrt{2}\sum_{\alpha p}(b_{p\alpha}u_p^\alpha e^{-ipx} + b_{-p\alpha}v_p^\alpha e^{ipx}),\\ \psi^+(x) &= \psi_+^+ + \psi_-^+ = m\sqrt{2}\sum_{\alpha p}(b_{p\alpha}^+ u_p^{\alpha+} e^{ipx} + b_{-p\alpha}^+ v_p^{\alpha+} e^{-ipx}),\end{aligned} \tag{78}$$

где выбрана нормировка: $u_p^{\alpha+}u_p^{\alpha'} = v_p^{\alpha+}v_p^{\alpha'} = \delta^{\alpha\alpha'}E_p / m$ и $E_p = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$. Здесь состояние с положительной энергией описывается спинором u_p, а с отрицательной энергией – спинором v_p.

Для того, чтобы кванты были фермионами, т.е. удовлетворяли статистике Ферми-Дирака, при перестановке двух квантов полная волновая функция должна изменить знак, т.е. быть антисимметричной и операторы рождения-уничтожения, а значит и операторы полей, должны быть антикоммутирующими. В результате при перестановке операторов полей в коммутаторах знак произведения меняется и коммутатор превращается в антикоммутатор. Следовательно, операторы полей квантуются через одновременные антикоммутаторы:

$$\left\{\psi^\alpha(\mathbf{x},t), \pi^{\alpha'}(\mathbf{x}',t)\right\} = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta^{\alpha\alpha'}, \tag{79}$$

что с учётом (75) даёт:

$$\left\{\psi^\alpha(\mathbf{x},t), \psi^{+\alpha'}(\mathbf{x}',t)\right\} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta^{\alpha\alpha'}. \tag{80}$$

Подстановка (78) даёт антикоммутаторы для операторов рождения-уничтожения:

$$\left\{b_{\pm p\alpha}, b^+_{\pm p'\alpha'}\right\} = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{\alpha\alpha'}, \quad \left\{b_{\pm p\alpha}, b_{\pm p'\alpha'}\right\} = \left\{b^+_{\pm p\alpha}, b^+_{\pm p'\alpha'}\right\} = 0. \tag{81}$$

В итоге, гамильтониан и оператор заряда из (76) принимают вид:

$$H = \sum_\alpha \int d^3p\, (b^+_{p\alpha}b_{p\alpha} - b^+_{-p\alpha}b_{-p\alpha})E_p, \tag{82}$$

$$Q = \sum_\alpha \int d^3p\, (b^+_{p\alpha}b_{p\alpha} + b^+_{-p\alpha}b_{-p\alpha}). \tag{83}$$

При этом вакуумные средние как от заряда, так и от компонентов тока равны нулю:

$$\langle 0|Q(x)|0\rangle = 0, \qquad \langle 0|\mathbf{j}(x)|0\rangle = 0. \tag{84}$$

Таким образом, и при квантовании фермионного поля с лагранжианами (74) наблюдаемые нормально-упорядочены и здесь нет нулевой энергии и нулевого заряда.

2.5. Неабелевы калибровочные поля и гравитоны

Как показано в разделе 2.3, квантование электромагнитного поля в новом методе приводит к теории без нулевой энергии вакуума. Неабелевы калибровочные поля A_μ^a (спин 1) во многом подобны полю фотонов в случае свободного поля и такого же результата можно ожидать и для них тоже. Квантование таких калибровочных полей и поля гравитонов (спин 2) в приближении слабого поля сводится к квантованию двух поперечных физических состояний векторных или тензорных полей. Все эти поля, как безмассовые, обладают аксиальной симметрией, а при круговой поляризации свободный гамильтониан и спиральность диагональны.

Поэтому описанное выше квантование поля фотонов применимо и в этом случае, а учёт нелинейности и внутренних симметрий полей не меняет основного вывода о занулении энергии вакуума. Действительно, нелинейные вклады пропорциональны константе связи g как в членах самодействия в напряжённости поля, так и в ковариантных производных. Поэтому, если рассмотреть слабые поля с константой связи $g^2 \ll 1$, то этими членами можно будет пренебречь и квантовать неабелевы калибровочные поля как наборы независимых фотоноподобных полей.

В случае гравитонов эффективная константа связи слаба вплоть до планковского расстояния l_g, где гравитационный радиус кванта сравнивается с её длиной волны, что приводит к сильному красному смещению частот флуктуаций. Быстрое уменьшение частот флуктуаций на расстояниях l_g из-за гравитационного застывания собственных времён для внешних наблюдателей, во времени которых и задана S-матрица, ведёт к малости нелинейных эффектов (см. вторую статью [11]).

Поскольку отсутствие нулевой энергии мод свободного поля следует из наличия у релятивистских полей состояний двух знаков энергии, то взаимодействия квантов не меняют этого результата. Все вклады в плотность энергии вакуума от взаимодействий будут пропорциональны константам связи и исчезают в пределе слабого поля, тогда как энергия вакуума свободного поля от этого не зависит.

Вывод о том, что при квантовании неабелевых полей и поля гравитонов в одной системе отсчёта, в поперечной калибровке и в приближении слабой связи нулевая энергия вакуума отсутствует, сохраняет свою силу для всех систем отсчёта и для всех калибровок из-за калибровочной и лоренц-инвариантности вакуума.

2.6. Скалярные поля, ведущие к спонтанному нарушению симметрии

В случае систем с вакуумными конденсатами, а также с сильными непертурбативными эффектами и топологически нетривиальными решениями вклады в энергию вакуума полей могут иметь существенные отличия, и они будут обсуждаться в дальнейшем. Тем не менее, вышеуказанные выводы из теории свободных полей в целом сохраняются даже при этих изменениях. В частности, те из таких вкладов, которые меняют энергию вакуума на конечную величину, не имеют отношения к нулевой энергии, которая по определению расходится.

Одним из таких примеров является изменение энергии вакуума при спонтанном нарушении симметрии в Стандартной Модели. Здесь самодействие изодублета комплексных скалярных полей ведёт к образованию вакуумного конденсата, взаимодействие с которым придаёт массы частицам, в том числе и некоторым квантам калибровочных полей.

Однако из первоначального изодублета, кроме этого конденсата, остаётся также и вещественное скалярное поле, скалярный бозон которого даже обнаружен. Такое поле в общем случае должно иметь нулевую энергию, однако, как будет показано ниже, в данном частном случае это не так и у этого скалярного поля нулевой энергии нет.

Рассмотрим спонтанное нарушение симметрии в системе с одним комплексным скалярным полем и абелевым калибровочным полем:

$$L_\pm = \pm\int d^3x\left(D_{\mu\pm}\phi_\pm^* \cdot D^{\mu\pm}\phi_\pm - \frac{\lambda^2}{4}(\phi_\pm^*\phi_\pm - \eta_\pm^2)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu\pm}F^{\mu\nu\pm}\right), \tag{85}$$

где $D_{\mu\pm} = \partial_{\mu\pm} - ieA_{\mu\pm}$, $F_{\mu\nu\pm} = \partial_{\mu\pm}A_{\nu\pm} - \partial_{\nu\pm}A_{\mu\pm}$. Записав скалярные поля как:

$$\phi_\pm(x)=\tilde{\phi}_\pm(x)e^{i\theta_\pm(x)},\quad \phi^*_\pm(x)=\tilde{\phi}^*_\pm e^{-i\theta_\pm(x)},\tag{86}$$

выберем $\theta_\pm{}'$ так, чтобы $\tilde{\phi}'_\pm$ были вещественными, т.е. $\tilde{\phi}_\pm=\tilde{\phi}^*_\pm$ (штрихи опущены):

$$\phi_\pm(x)=\tilde{\phi}_\pm(x)e^{i\theta_\pm(x)},\quad \phi^*_\pm(x)=\tilde{\phi}_\pm(x)e^{-i\theta_\pm(x)}.\tag{87}$$

Калибровочным преобразованием $A_{\mu\pm}=A'_{\mu\pm}+e^{-1}\partial_\mu\theta_\pm$ из (85) исключаем поле $\theta_\pm$, а из оставшегося вещественного поля $\tilde{\phi}_\pm$ выделим малое отклонение от η:

$$\tilde{\phi}_\pm(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\eta_\pm+\chi_\pm(x)]\tag{88}$$

Несмотря на то, что $\chi_\pm$ является вещественным скалярным полем, оно не является истинно нейтральным, так как сохраняет следы того, что является одной из двух компонент комплексного поля. А именно, его частотное разложение даётся не как у истинно нейтрального поля $\chi\sim\chi_+f+\chi^*_+f^*$, а как для заряженного поля $\chi\sim\chi_+f+\chi_-f^*$. Поэтому у такого скалярного остатка комплексного поля нулевой энергии не будет.

Отметим, что частицы и античастицы такого скалярного поля в обычных взаимодействиях ничем не отличаются, но при CP-нарушении могут привести к наблюдаемым эффектам.

3. Коммутаторы полей, пропагаторы, микропричинность и статистика

3.1. Коммутаторы и причинные корреляторы координат осциллятора

Коммутаторы для координат комплексного гармонического осциллятора получим из (32):

$$[q_\pm(t'),q^*_\pm(t)]=\frac{1}{2m\omega}[a_\pm,a^*_\pm]e^{\mp i\omega(t'-t)}=\frac{1}{2m\omega}e^{\mp i\omega(t'-t)},\tag{89}$$

$$[q_\pm(t'),q_\pm(t)]=[q^*_\pm(t'),q^*_\pm(t)]=0.\tag{90}$$

Коммутатор (89) в общем случае неравных времён комплексный и становится вещественным только для одинаковых времён. При этом комплексно-сопряжённые координаты не коммутируют и при одинаковых временах $[q_\pm(t),q^*_\pm(t)]=1/2m\omega$. Как результат этого факта порядок комплексно-сопряжённых операторов в их произведении важен и $q_\pm q^*_\pm\neq q^*_\pm q_\pm$. Суммы двух типов координат $q=q_++q_-$ и $q^*=q^*_++q^*_-$ также не коммутирует:

$$[q(t'),q^*(t)]=\frac{1}{2m\omega}\Big([a_+,a^*_+]e^{-i\omega(t'-t)}+[a_-,a^*_-]e^{i\omega(t'-t)}\Big)=\frac{1}{m\omega}\cos[\omega(t'-t)].\tag{91}$$

Причинный коррелятор для координат в два момента времени должен описывать тот факт, что кванты с положительной энергией идут только вперёд, а с отрицательной энергией только назад во времени. Построить такой коррелятор можно, если обычное хронологическое произведение операторов обобщить на системы с квантами разного направления временной эволюции.

Обычный оператор хронологического произведения операторов [7], которого обозначим как T_+, действует только на операторы состояний с положительной энергией. Он не симметричен по времени и расставляет операторы в порядке возрастания временного аргумента справа налево:

$$T_+[A_+(t_2)B_+(t_1)] = \begin{cases} A_+(t_2)B_+(t_1), & t_2 > t_1, \\ B_+(t_1)A_+(t_2), & t_2 < t_1. \end{cases} \tag{92}$$

Обратный ему оператор T_-, действующий только на состояния с отрицательной энергией, определим как оператор, расставляющий операторы в обратном порядке – с возрастанием времени слева направо:

$$T_-[A_-(t_2)B_-(t_1)] = \begin{cases} B_-(t_1)A_-(t_2), & t_2 > t_1, \\ A_-(t_2)B_-(t_1), & t_2 < t_1. \end{cases} \tag{93}$$

Их обобщение, симметричный оператор хронологического упорядочения $\hat{T}$ определим как произведение этих двух операторов T_+ и T_-, из-за чего он будет иметь следующие свойства:

$$\hat{T} = T_+T_-, \quad \hat{T}A_+ = T_+A_+, \quad \hat{T}A_- = T_-A_-. \tag{94}$$

Он действует избирательно на состояния обеих знаков энергии, расставляя их во взаимно-обратном порядке, например, при $t_2 > t_1$:

$$\begin{aligned} &\hat{T}[A_+(t_2)B_+(t_1)A_-(t_2)B_-(t_1)] = T_+[A_+(t_2)B_+(t_1)]\cdot T_-[A_-(t_2)B_-(t_1)] = \\ &= A_+(t_2)B_+(t_1)\cdot B_-(t_1)A_-(t_2) \end{aligned} \tag{95}$$

Под знаком симметричного хронологического произведения $\hat{T}$ операторы можно переставлять произвольно и это не меняет конечный результат.

Причинные корреляторы для координат комплексного осциллятора определяются как матричные элементы по основному состоянию от симметричных хронологических произведений в два момента времени $\langle 0|\hat{T}[q(t_2)q^*(t_1)]|0\rangle$ и $\langle 0|\hat{T}[q^*(t_2)q(t_1)]|0\rangle$. При $t_2 > t_1$ они равны:

$$\begin{aligned} &\langle 0|\hat{T}[q(t_2)q^*(t_1)]|0\rangle = \langle 0|T_+[q_+(t_2)q_+^*(t_1)]|0\rangle + \langle 0|T_-[q_-(t_2)q_-^*(t_1)]|0\rangle = \\ &= \langle 0|q_+(t_2)q_+^*(t_1)|0\rangle + \langle 0|q_-^*(t_1)q_-(t_2)|0\rangle = \langle 0|q_+(t_2)q_+^*(t_1)|0\rangle, \end{aligned} \tag{96}$$

$$\begin{aligned} &\langle 0|\hat{T}[q^*(t_2)q(t_1)]|0\rangle = \langle 0|T_+[q_+^*(t_2)q_+(t_1)]|0\rangle + \langle 0|T_-[q_-^*(t_2)q_-(t_1)]|0\rangle = \\ &= \langle 0|q_+^*(t_2)q_+(t_1)|0\rangle + \langle 0|q_-(t_1)q_-^*(t_2)|0\rangle = \langle 0|q_-(t_1)q_-^*(t_2)|0\rangle. \end{aligned} \tag{97}$$

В общем случае имеем:

$$\langle 0|\hat{T}[q(t_2)q^*(t_1)]|0\rangle = \langle 0|\hat{T}[q^*(t_1)q(t_2)]|0\rangle = \begin{cases} \langle 0|q_+(t_2)q_+^*(t_1)|0\rangle, & t_2 > t_1, \\ \langle 0|q_-(t_2)q_-^*(t_1)|0\rangle, & t_2 < t_1. \end{cases} \tag{98}$$

Итак, причинный коррелятор определяется через симметричный оператор $\hat{T}$ как:

$$\begin{aligned}&\langle 0|\hat{T}[q(t_2)q^*(t_1)]|0\rangle = \langle 0|\hat{T}[q^*(t_1)q(t_2)]|0\rangle = \\ &= \theta(t_2-t_1)\langle 0|q_+(t_2)q_+^*(t_1)|0\rangle + \theta(t_1-t_2)\langle 0|q_-(t_2)q_-^*(t_1)|0\rangle = \\ &= \frac{1}{2m\omega}\left(\theta(t_2-t_1)e^{-i\omega(t'-t)} + \theta(t_1-t_2)e^{i\omega(t'-t)}\right).\end{aligned} \tag{99}$$

3.2. Противоречивость прежней стандартной трактовки микропричинности

Прежняя стандартная формулировка КТП основывалась на условии микропричинности, применявшемся в классической теории релятивистских полей. Исходя из отсутствия сверхсветовых сигналов утверждалось, что измерения поля в точке x не влияют на измерения в точке x' вне светового конуса с $(x'-x)^2>0$.

В квантовой механике это означало одновременную измеримость полевых переменных в этих точках, что выражалось в требовании о том, чтобы операторы поля $\phi(x)$ и $\phi(x')$ коммутировали (или антикоммутировали). Перестановочные функции (коммутаторы) бозонных полей поэтому должны были быть нечётными функциями интервала времени $t'-t$, исчезающими за световым конусом и именно это свойство считалось выражением микропричинности и локальности в КТП [9,10].

Перестановочная функция (коммутатор) комплексного скалярного поля исчезал за световым конусом благодаря замене $[a_{k-},a^*_{k'-}]=[b^*_{k+},b_{k'+}]=-[b_{k'+},b^*_{k+}]$, обеспечивающей нужный знак минус:

$$\begin{aligned}&[\phi(x'),\phi^*(x)] = \sum_{k,k'} e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{x}'-\mathbf{k}\mathbf{x})}\left([a_{k+},a^*_{k'+}]e^{-i(\omega_{k'}t'-\omega_k t)} - [b_{k+},b^*_{k'+}]e^{i\omega_k(t'-t)}\right) = \\ &= -2i\sum_k e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}\sin[\omega_k(t'-t)] = -iD(x'-x),\end{aligned} \tag{100}$$

где функция Паули-Йордана $D(x'-x)=0$ при $(x'-x)^2>0$. Это считалось свидетельством выполнения в КТП классического условия микропричинности и широко использовалось в различных применениях.

В то же время, причинный пропагатор для квантов поля, т.е. вакуумное среднее от хронологических произведений, не исчезал за световым конусом:

$$\begin{aligned}&\langle 0|T_+[\phi(x')\phi^*(x)]|0\rangle = \\ &= \sum_k\left[\theta(t'-t)e^{-i\omega_k(t'-t)} + \theta(t-t')e^{i\omega_k(t'-t)}\right]e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} = iD_c(x'-x),\end{aligned} \tag{101}$$

где $D_c(x'-x)\neq 0$ при $(x'-x)^2>0$. Это означало, что в КТП сверхсветовые перемещения квантов имеют место по крайней мере в масштабах комптоновской длины квантов. Это неудивительно, так как в этой области одночастичное приближение более неприменимо, а в многочастичной системе, где присутствуют виртуальные пары, такие перемещения эффективно реализуются.

Но если пропагатор обеспечивает сверхсветовые сигналы (пусть и в мягкой форме, т.е. в малой окрестности), то исходное положение классической причинности о полном отсутствии таких сигналов более недействительно. А именно, измерение в точке x может влиять на измерение в точке x' даже при $(x'-x)^2>0$ с помощью виртуальных квантов, переносимых причинным пропагатором (101).

Таким образом, в стандартной формулировке КТП, с одной стороны, есть сверхсветовые сигналы, переносимые причинным пропагатором, а с другой стороны, не обращая никакого внимания на это новое обстоятельство, требовалось полное отсутствие таких сигналов при измерениях полей, настаивая на уже устаревшей аналогии с классической теорией. Это значит, что в трактовке микропричинности теория пришла к внутреннему противоречию уже в случае скалярных полей.

В случае фермионных полей антикоммутатор, имеющий вид:

$$\{\psi(x'),\bar{\psi}(x)\} = \sum_p [(\not{p}+m)e^{-iE_p(t'-t)}e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} + (\not{p}-m)e^{iE_p(t'-t)}e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}], \qquad (102)$$

может быть представлен через функцию Паули-Йордана:

$$\{\psi_\pm(x'),\bar{\psi}_\pm(x)\} = (i\not{\partial}_{x'}+m)iD(x'-x), \qquad (103)$$

и он также исчезает за световым конусом, так что прежнее определение микропричинности распространялось и на фермионы. При $t'=t$ (102) сводится к $\delta^3(\mathbf{x}'-\mathbf{x})$, как и должно быть для одновременного антикоммутатора (80).

Итак, то свойство коммутаторов полей, которое преподносилось как строгое соблюдение классического условия микропричинности в КТП, противоречило свойству причинных пропагаторов. Сверхсветовые сигналы исключались при измерениях полей, тогда как в расчётах диаграмм с причинными пропагаторами такие сигналы учитывались как важная часть физической картины, что показывает противоречивость прежних трактовок микропричинности и локальности.

3.3. Несостоятельность прежнего доказательства связи спина и статистики

В прежней стандартной формулировке КТП доказательство теоремы о связи спина и статистики основывалась на двух условиях. В частном случае свободных полей - это условие положительности энергии квантов спинорного поля, из-за чего вместо коммутаторов вводились антикоммутаторы, а в более общем случае полей с взаимодействиями - это условие микропричинности, понимаемое как исчезновение коммутаторов полей за световым конусом [9,10].

В разделе 2.4, поле спина ½, описываемое уравнением Дирака, квантовалось в рамках трактовки ШФ путём введения антикоммутаторов, предполагая, что это фермионное поле. Но в этом случае антикоммутаторы не привели к исключению квантов с отрицательной энергии. Это означает, что появление антикоммутаторов в последовательной квантовой теории поля, не содержащей расходящейся нулевой энергии, не связано со знаком энергии квантов.

В прежней стандартной формулировке факт увязки антикоммутаторов со знаком энергии был артефактом «ручной» замены операторов рождения (уничтожения) квантов отрицательной энергии операторами уничтожения (рождения) античастиц, которое и вело к нулевой энергии.

В разделе же 3.4 будет показано, что в КТП на базе трактовки ШФ прежнее условие микропричинности модифицируется, становясь более «мягкой», так как теория содержит эффективную нелокальность из-за процессов рождения-уничтожения виртуальных пар в пределах комптоновской длины квантов.

При этом коммутаторы бозонного поля ведут себя аналогично причинным пропагаторам, не исчезающим за световым конусом. Это не только не создаёт проблем, а наоборот, лишь восстанавливает внутреннюю согласованность КТП.

В этой связи отметим следующие два факта, на которых и будем далее опираться в вопросе о связи спина и статистики. Во-первых, это факт описания квантов с целым спином симметричными волновыми функциями, так как, например, в системе с двумя парами электронов каждая из пар имеет целый суммарный спин, а при попарной перестановке электронов общая волновая функция не меняет свой знак. Это означает, что первая часть теоремы о связи спина и статистики, что частицы целого спина являются бозонами, доказывается очевидным образом.

Во-вторых, это факт того, что частицы с полуцелым спином в рамках трактовки ШФ могут в принципе описываться как симметричными, так и антисимметричными волновыми функциями, но опыт показывает, что верно второе, т.е. они являются фермионами. Тем самым, на данном уровне нашего понимания КТП вторая часть прежней теоремы о связи спина и статистики, что кванты с полуцелым спином являются фермионами, не является теоремой, которая доказана, а является постулатом, основанным на экспериментах.

3.4. Коммутаторы и причинные пропагаторы полей в новом методе

Перестановочная функция (коммутатор) комплексного скалярного поля в новом методе равна:

$$\begin{aligned}&[\phi(x'),\phi^*(x)]=[\phi_+(x'),\phi_+^*(x)]+[\phi_-(x'),\phi_-^*(x)]=\\&=\sum_k(e^{-i\omega_k(t'-t)}+e^{i\omega_k(t'-t)})e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}=-iD_1(x'-x).\end{aligned}\tag{104}$$

Этот результат отличается от результата прежней формулировки КТП с $D(x'-x)$ (100). Теперь же фигурирует $D_1(x'-x)$, чётная функция интервала времени, не исчезающая за световым конусом, хотя и сосредоточенная в основном в пределах комптоновской длины. В этом отношении перестановочная функция (104) ведёт себя аналогично причинному пропагатору. Последствия такого поведения, в частности для определения микропричинности, обсуждаются в следующем разделе.

Причинный пропагатор для квантов поля построим также, как и в случае осциллятора, определяя её как симметричное хронологическое произведение операторов $\hat{T}$ со свойствами (94). Причинные пропагаторы для квантов поля тогда будут вакуумными средними от симметричных хронологических произведений полевых операторов в двух точках пространства-времени $\langle 0|\hat{T}[\phi(x')\phi^*(x)]|0\rangle$ и $\langle 0|\hat{T}[\phi^*(x')\phi(x)]|0\rangle$. Как и в случае осциллятора, они приобретают вид:

$$\begin{aligned}&\langle 0|\hat{T}[\phi(x')\phi^*(x)]|0\rangle=\langle 0|\hat{T}[\phi^*(x)\phi(x')]|0\rangle=\\&=\langle 0|\phi_+(x')\phi_+^*(x)|0\rangle\theta(t'-t)+\langle 0|\phi_-(x')\phi_-^*(x)|0\rangle\theta(t-t')=\\&=\sum_k\left[\theta(t'-t)e^{-i\omega_k(t'-t)}+\theta(t-t')e^{i\omega_k(t'-t)}\right]e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}=iD_c(x'-x),\end{aligned}\tag{105}$$

Таким образом, естественным образом приходим к стандартному причинному пропагатору ШФ, который не исчезает за световым конусом.

Аналогично выводятся причинные пропагаторы для векторного и тензорного полей, совпадающие со стандартными причинными пропагаторами для этих полей.

Причинный пропагатор для фермионов, как и для бозонов, определяется как вакуумное среднее от симметричного хронологического произведения и также совпадает с прежним стандартным причинным пропагатором:

$$
\begin{aligned}
iS_c(x'-x)_{ij} &= \langle 0|\hat{T}[\psi_i(x')\bar{\psi}_j(x)]|0\rangle = -\langle 0|\hat{T}[\bar{\psi}_j(x)\psi_i(x')]|0\rangle = \\
&= \langle 0|\psi_{i+}(x')\bar{\psi}_{j+}(x)|0\rangle\theta(t'-t) + \langle 0|\psi_{i-}(x')\bar{\psi}_{j-}(x)|0\rangle\theta(t-t') = \\
&= \sum_p \Big[\theta(t'-t)(\not{p}+m)e^{-iE_p(t'-t)}e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} + \theta(t-t')(\not{p}-m)e^{iE_p(t'-t)}e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}\Big]_{ij}.
\end{aligned} \tag{106}
$$

3.5. Последовательность в соблюдении микропричинности в новом методе

Как было показано в разделе 3.3, прежнее определение микропричинности, декларированное как исчезновение коммутаторов или антикоммутаторов полей за световым конусом, противоречило свойствам причинных пропагаторов.

Излагаемое в данной статье квантование на базе трактовки ШФ приводит к чётным перестановочным функциям (коммутаторам) для бозонных полей. Эти перестановочные функции не исчезают за световым конусом, но быстро спадают вне комптоновской длины. В этом смысле ведут себя также, как и причинные пропагаторы.

С физической точки зрения это означает, что за световым конусом классические условия локальности и релятивистской причинности выполняются не строго, а приближённо из-за корреляций функций полей в масштабах комптоновской длины. Поэтому они выполняются тем лучше, чем больше расстояния по сравнению с характерным масштабом эффективной нелокальности в многочастичной системе.

Таким образом, новый метод приводит к пересмотру условий классической микропричинности в сторону смягчения для квантовых полей.

3.6. Взаимодействующие поля и диаграммная техника

При анализе следствий нового метода квантования для взаимодействующих полей сначала отметим некоторые различия с прежней диаграммной техники, а затем выделим ту её часть, которая сохраняет свою силу и в новом методе.

Если в вершинах взаимодействий присутствуют несколько операторов одного и того же поля, то теперь необходимо учитывать тот факт, что не все из этих операторов взаимно (анти)коммутируют, например $\phi(x)\phi^*(x) \neq \phi^*(x)\phi(x)$. Общие следствия этого для диаграммной техники и наблюдаемых будут обсуждаться в последующих публикациях.

В частных случаях диаграмм, описывающих известные процессы и петлевые поправки, операторы одного и того же поля в каждой вершине обычно соответствуют разным состояниям и поэтому взаимно (анти)коммутируют, что и предполагалось в прежней диаграммной технике.

Формальным отличием нового метода является введение симметричного по времени хронологического упорядочения, но это приводит к стандартным причинным пропагаторам. Поэтому и это отличие эффективно было учтено в прежней диаграммной технике при конструировании причинных пропагаторов, из-за чего прежние результаты согласуются с новым методом.

Внешние линии диаграмм прежней стандартной формулировки КТП фактически основывались на представлении античастиц по трактовке ШФ и поэтому и в этом отношении отличия не появляются.

Поскольку пропагаторы и внешние линии в новой и прежней методах одинаковы, то и вся диаграммная техника по существу не изменится и поэтому новый метод фактически узаконивает применения прежней диаграммной техники, уменьшив число её рецептов.

4. Последовательный переход от трактовки ШФ к античастицам

Трактовка ШФ, где описание идёт в терминах частиц двух знаков энергии и нет античастиц, очень удобна и достаточна для последовательного описания большинства наблюдаемых в физике частиц явлений и поэтому она широко используется. Но для полноты физической картины необходимо также знать, что от этой несколько формальной картины всегда можно перейти к картине частиц и античастиц положительной энергии, которые и наблюдаются на экспериментах. Этот переход должен осуществляться корректно, так как перестановка между собой начальных и конечных состояний, необходимая для такого перехода, не является простой операцией, особенно для произведений операторов, и это требует определённого набора необходимых шагов.

Стандартная процедура перехода как раз и была примером неаккуратности в этом вопросе, что и стала одной из причин несостоятельности всей стандартной формулировки КТП. Процедура состояла в подстановке вручную операторов рождения (уничтожения) античастиц вместо операторов уничтожения (рождения) частиц отрицательной энергии прямо в операторах полей, независимо от того, в каких произведениях фигурируют эти полевые операторы. Такой упрощённый и наивный подход затем порождал в свободном гамильтониане нулевые энергии, которые расходились, а для фермионов оказывались ещё и отрицательными (!), что требовало введения искусственного рецепта нормального упорядочения, в том числе и в операторах взаимодействий [9,10].

Ниже будут приведены две последовательные процедуры перехода от трактовки ШФ к картине античастиц. Первая, основанная на зарядовой (C) симметрии, проста и удобна для применения к билинейным произведениям операторов полей в один момент времени, в частности, в свободном гамильтониане и операторе тока (заряда). Вторая же, основанная на широко применяемом на практике проявлении трактовки ШФ – перекрёстной (или кроссинг) симметрии, более универсальна и применима также к пропагаторам и операторам взаимодействий.

4.1. Переход к античастицам с помощью зарядовой симметрии

Простейшую процедуру на основе C-симметрии, позволяющую исключить операторы квантов отрицательной энергии из операторов наблюдаемых, покажем на примере осциллятора с комплексными координатами.

Такой осциллятор с гамильтонианом и оператором заряда (37):

$$H = \omega(a_+^* a_+ - a_-^* a_-), \quad Q = a_+^* a_+ + a_-^* a_-, \quad [a_\pm, a_\pm^*] = 1, \tag{107}$$

является C-симметричным, т.е. при C-сопряжение H инвариантен, тогда как Q меняет знак:

$$H^c \equiv CHC^{-1} = H, \quad Q^c \equiv CQC^{-1} = -Q. \tag{108}$$

Лестничные операторы, зарядово-сопряжённые к обычным операторам, определяются как:

$$b_\pm = C a_\pm C^{-1}, \quad b_\pm^* = C a_\pm^* C^{-1}, \quad [b_\pm, b_\pm^*] = 1, \tag{109}$$

и зарядово-сопряжённые гамильтониан и заряд выражаются через них как:

$$H^c = \omega(b_+^* b_+ - b_-^* b_-), \quad Q^c = b_+^* b_+ + b_-^* b_-. \tag{110}$$

Далее, используя условия C-симметрии (108), операторные произведения $a_-^* a_-$ и $b_-^* b_-$ для отрицательно-энергетических состояний заменим операторными произведениями $b_+^* b_+$ и $a_+^* a_+$ для положительно-энергетических состояний. Для этого условия (108) запишем в явном виде

$$\begin{aligned} H &= \omega(a_+^* a_+ - a_-^* a_-) = \omega(b_+^* b_+ - b_-^* b_-) = H^c, \\ Q &= a_+^* a_+ + a_-^* a_- = -(b_+^* b_+ + b_-^* b_-) = -Q^c \end{aligned} \tag{111}$$

и получаем два операторных соотношения для четырёх видов произведений:

$$\begin{aligned} a_+^* a_+ - a_-^* a_- &= b_+^* b_+ - b_-^* b_-, \\ a_+^* a_+ + a_-^* a_- &= -b_+^* b_+ - b_-^* b_-. \end{aligned} \tag{112}$$

Далее, складывая и вычитая эти два соотношения, получаем два операторных тождества:

$$a_-^* a_- = -b_+^* b_+, \quad b_-^* b_- = -a_+^* a_+, \tag{113}$$

где второе тождество есть зарядово-сопряжённая форма первого. Они и позволяют исключить $a_-^* a_-$ и $b_-^* b_-$ из операторов наблюдаемых (107) и (110):

$$\begin{aligned} H &= H^c = \omega(a_+^* a_+ + b_+^* b_+), \\ Q &= -Q^c = a_+^* a_+ - b_+^* b_+. \end{aligned} \tag{114}$$

Итак, условия C-симметрии позволяют перейти от трактовки ШФ к античастицам.

Отметим, что операторные соотношения, в том числе и тождества (113), имеют смысл равенства средних по соответствующим состояниям и для полноты картины необходимо производить зарядовые сопряжения также и состояний, по которым берутся эти средние.

4.2. Переход к картине античастиц с использованием кроссинг симметрии

В прежней стандартной трактовке КТП операторы частиц отрицательной энергии a_{-k} и a_{-k}^* заменялись «вручную» на операторы античастиц положительной энергии прямо в операторах полей:

$$a_{-k}^* \to b_k, \quad a_{-k} \to b_k^*. \tag{115}$$

При этом возможность такой замены в произведениях операторов не доказывалась, а наивно подразумевалась как якобы очевидное следствие (115).

Однако, в трактовке ШФ, как и в одной из её практически используемых в физике частиц форм - перекрёстной (или кроссинг) симметрии, такой переход включает замену начальных и конечных состояний, что ведёт к нетривиальным следствиям для произведений операторов. Поэтому здесь требуются осторожность и более аккуратные определения, в частности, все замены операторов a_{-k}, a_{-k}^* и их произведений на операторы античастиц b_k^*, b_k и их произведения должны быть согласованы с условиями кроссинг-симметрии.

Кроссинг-симметрия позволяет из выражения для амплитуды одного процесса легко получить амплитуды нескольких других, «родственных» процессов. Благодаря этой симметрии частицу в начальном (конечном) состоянии с 4-импульсом $+p_\mu$ можно перевести в конечное (начальное) состояние с 4-импульсом $-p_\mu$ и, после изменения направления эволюции во времени на обратную, считать описанием античастицы:

$$A+B\to C+D,\quad A+\bar{C}\to\bar{B}+D,\quad A+\bar{D}\to C+\bar{B}. \tag{116}$$

Тем самым, кроссинг-операция, состоящая из поворота линии вокруг вершины в диаграмме с переводом в другой световой конус, изменений знака 4-импульса и направления временной эволюции, превращает частицу в античастицу (и наоборот).

При кроссинг-преобразовании изменение знака 4-импульса частицы и изменение знака интервала времени компенсируют друг друга, что и оставляет положительным знак энергии полученной античастицы. При этом частицы движутся по направлению стрелки в диаграмме, а античастица - в обратном направлении. Тем самым линия частицы, направленная в прошлое, соответствует античастице, идущей обратно, т.е. в будущее.

При этом трактовка ШФ, а значит и кроссинг-преобразование, относятся к отдельным линиям в фейнмановской диаграмме, независимо от других линий, что и отличает их от CPT-преобразования, относящегося ко всей диаграмме в целом.

Для примера рассмотрим связь между амплитудами рассеяния электронов и позитронов в кулоновском поле. Матричный элемент перехода позитрона:

$$S_{fi}=ie\int d^4x\langle -p_i,s_i|\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x)|-p_f,s_f\rangle A_0(x). \tag{117}$$

при подстановке полевых операторов (78) принимает вид:

$$S_{fi}=-\sum_{p,s}\langle -p_i,s_i|b^+_{-p,s}b_{-p,s}|-p_f,s_f\rangle\tilde{S}_{fi}, \tag{118}$$

где $\tilde{S}_{fi}$ - все прочие множители. В то же время, после кроссинг-преобразования амплитуды для рассеяния электрона, превращающего её в амплитуду для позитрона, получим:

$$S_{fi}=\sum_{p,s}\langle p_f,s_f|d^+_{p,s}d_{p,s}|p_i,s_i\rangle\tilde{S}_{fi}. \tag{119}$$

Из сравнения двух выражений, (118) и (119), получаем:

$$-\langle -p_i,s_i|b^+_{-p,s}b_{-p,s}|-p_f,s_f\rangle=\langle p_f,s_f|d^+_{p,s}d_{p,s}|p_i,s_i\rangle, \tag{120}$$

что представляет собой матричную форму операторного соотношения (113) для случая фермионов.

Согласование правил квантования с такой фундаментальной симметрией физики частиц как кроссинг-симметрия ведёт к ряду изменений, которые вместе с рассмотренными выше ведут к кроссинг-симметричному квантованию. Следствия для взаимодействующих полей, включая уточнения в определениях причинных пропагаторов частиц, правил упорядочения произведений операторов и правил диаграммной техники будут обсуждаться в дальнейшем.

5. О следствиях отсутствия нулевой энергии полей

5.1. Эксперименты подтвердившие отсутствие нулевой энергии полей

Квантовые флуктуации полей реальных источников, таких как электроны и протоны, ведут ко многим наблюдаемым эффектам. Предсказания КТП с такими реальными источниками согласуются с экспериментами и часто точность такого согласия беспрецедентна.

В частности, лэмбовский сдвиг определяется энергией взаимодействия $H_I^{(r)} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}_{(r)}$, где $\mathbf{A}_{(r)}$ описывает виртуальные фотоны, а $\mathbf{j}$- ток электронов и протонов. Виртуальные фотоны являются возбуждённым состоянием электромагнитного поля и не имеют отношения к гипотетическим вакуумным внешним полям $\mathbf{A}_{(0)}$, ассоциированным с нулевой энергией вакуума $H_0^{(0)}$. Эксперименты показали, что наблюдаемое значение лэмбовского сдвига $\Delta E_I^{\exp}$ полностью объясняется вкладом $\Delta E_I^{(r)}$ виртуальных фотонов от реальных источников:

$$\Delta E_I^{\exp} = \Delta E_I^{(r)}, \tag{121}$$

Но в прежней стандартной формулировке КТП нулевые флуктуации вакуума полей должны были давать дополнительный вклад в лэмбовский сдвиг. В данном случае нулевая энергия электромагнитного поля $H_0^{(0)}$, которая там была неизбежна, должна была порождаться флуктуирующими вакуумными полями $\mathbf{E}_{(0)}, \mathbf{B}_{(0)}$:

$$H_0^{(0)} = 2\int d^3k\,\frac{1}{2}\omega_k = \int d^3x\,\frac{1}{2}(\mathbf{E}_{(0)}^2 + \mathbf{H}_{(0)}^2) \tag{122}$$

и в полной энергии был бы вклад от энергии взаимодействия зарядов с этими вакуумными полями $H_I^{(0)} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}_{(0)}$, где $\mathbf{E}_{(0)}, \mathbf{B}_{(0)}$ напряжённости поля $\mathbf{A}_{(0)}$ [9,10]. Так как эта дополнительная энергия взаимодействия $H_I^{(0)}$ входит в гамильтониан взаимодействий *аддитивно* с энергией взаимодействия $H_I^{(r)}$ этих же частиц с полями реальных источников $\mathbf{A}_{(r)}$, то вклад нулевых флуктуаций $\Delta E_I^{(0)}$ должен был быть суммирован с вкладом реальных источников $\Delta E_I^{(r)}$.

Поскольку оба вклада одного порядка (из-за чего их обычно и путали), то предсказываемые сдвиги энергий фактически удвоились бы:

$$\Delta E_I = \Delta E_I^{(0)} + \Delta E_I^{(r)} \approx 2\Delta E_I^r. \tag{123}$$

Наблюдения же свидетельствуют о существовании лишь однократного вклада, который в традиционной научной методологии следует отнести к вкладу реальных источников ΔE_I^r, так как этот вклад не может быть игнорирован ни в коем случае.

В случае эффекта Казимира наблюдаемый эффект полностью объясняется вкладом полей других реальных источников - флуктуирующих полей излучения атомов кристалла. Хорошо известно, что теория сил Ван-дер-Ваальса успешно описывает эффект Казимира, включая зависимости от температуры, через излучение реальных источников – атомов – при их колебаниях в кристалле, в том числе и при колебаниях при «нулевой *температуре*» кристалла. Поскольку вклады от чисто вакуумных полей из $H_I^{(0)}$ того же порядка и должны суммироваться с излучением атомов ($H_I^{(r)}$), то прежняя трактовка с нулевой энергией и в этом случае даёт вдвое большее значение эффекта Казимира, чем наблюдается.

Таким образом, вклады реальных источников, которые не могут быть игнорированы, полностью объясняют результаты наблюдений в случае обеих эффектов. Тем самым имеющиеся эксперименты исключают вклад нулевых флуктуаций вакуума и поэтому только новый метод квантования полей на базе трактовки ШФ, где их нет, находится в согласии с этими экспериментами.

Однако, по иронии истории, об этих же экспериментах был создан миф о том, что они будто бы подтвердили обратное утверждение, что нулевая энергия вакуума в них якобы явно проявилась. Этот миф затем широко пропагандировался в литературе, в том числе и в известных учебниках по КТП. В действительности же он основан на логическом трюке, используемом в манипулятивной пропаганде. Смысл его в том, что сначала реальное явление объясняется желанной нереальной причиной, не учитывая реальную причину. А затем, когда это же явление приходится объяснять также и его реальной причиной, не учитывается нереальная причина. В итоге создаётся ложное убеждение, что нереальная причина приемлема на равных правах с реальной и поэтому нереальная также является реальной, так как якобы тоже «подтверждена» наблюдениями.

Отметим, что этот случай применения «нетрадиционной» логики в науке является примером известного в психологии феномена «двоемыслия», «способности придерживаться двух противоположных убеждений одновременно». В традиционной же научной методологии, если у явления предполагаются две одновременно влияющие причины, то следствия их влияния также должны быть учтены одновременно. Если же при этом явление полностью объясняется только одной из причин, существование которой не вызывает сомнений, то вторая причина должна считаться отсутствующей и потому опровергнутой. В нашем случае причиной, которую нельзя игнорировать, и которая достаточна для объяснения наблюдений, является поле реальных источников, а мифическая «альтернатива», без которой всё и так объясняется, это влияние нулевых флуктуаций вакуумных полей.

5.2. Частичное решение проблемы космологической постоянной

Как показывают наблюдения, величина космологической постоянной является практически исчезающей и новый метод квантования полей на базе трактовки ШФ естественным образом объясняет этот наблюдательный факт в части отсутствия вклада от вакуума свободных фундаментальных полей.

Но этот факт был загадочным в прежней формулировке КТП с большим вкладом нулевой энергии вакуума полей. Все попытки сокращения этой энергии в рамках этой формы КТП только усугубляли ситуацию, потребовав дополнительные нереалистичные гипотезы.

При этом важно то, что попытки устранения нулевой энергии искусственными приёмами, типа «нормального упорядочения» или сдвига точки отсчёта энергии, были не приемлемы из-за существования гравитации и этот факт был хорошо известен. В этой связи Стандартная Модель, основанная на прежних методах квантования, была несостоятельной, что ясно осознавалось.

Поэтому исчезновение нулевой энергии вакуума полей при их квантовании по новому методу свидетельствует о внутренней самосогласованности и верности физических идей и принципов, лежащих в основе всей релятивистской квантовой теории.

В то же время это лишь исключает вклад вакуума свободных полей и поэтому не означает полное решение проблемы космологической постоянной. Другие возможные вклады, такие как вклады конденсатов полей, петлевые вклады и т.д. не входят в компетенцию теории свободных полей и требуют рассмотрения теории взаимодействующих полей.

Отметим, что и в теории взаимодействующих полей новый метод приводит к автоматическому нормальному упорядочению многих произведений операторов, что исключает расходящиеся петлевые вклады в энергию вакуума. Этот факт, тем самым, решает проблему космологической постоянной также и в той части, которая связана с вкладом вакуума взаимодействующих полей, по крайней мере в рамках теории возмущений.

5.3. Суперсимметрия не решает проблему нулевой энергии

Возможное существование суперсимметрии, симметрии между бозонами и фермионами, позволяющее решить проблемы с расходимостями в теории поля и проблем объединения в физике частиц, было одной из наиболее обнадёживающих и широко развиваемых гипотез за последние полвека.

Были три ожидания от этой новой симметрии: взаимное сокращение нулевых энергий бозонов и фермионов, частичное сокращение расходимостей в петлевых диаграммах, а также возможности создания более простых моделей объединения полей и частиц. Здесь остановимся только на первом из этих надежд – на возможном сокращении нулевых энергий.

Идея о возможности сокращения нулевых энергий бозонов и фермионов следует из того факта, что при стандартном квантовании фермионных полей возникала не обычная нулевая энергия, а нулевая энергия отрицательного знака!

Однако, последовательное ШФ-квантование фермионов показало, что на самом деле фермионы в релятивистской теории не имеют нулевой энергии вообще. В прежней трактовке (отрицательная) нулевая энергия появлялась из-за того, что операторы античастиц вводились в фермионные полевые функции вручную. В трактовке ШФ же переход к античастицам не обязателен и поэтому нет и нулевой энергии. А если всё же есть желание перейти на язык античастиц, то это можно сделать в диаграммах конкретных процессов, используя перекрёстную или CTP-симметрию, что обычно и делается при расчётах, но такой корректный переход не меняет гамильтониан именно из-за указанных симметрий гамильтониана.

Таким образом, из трёх основных аргументов в пользу суперсимметрии один, связанный с нулевыми энергиями, оказался в действительности неактуальным.

6. Конечная квантовая теория струн в трактовке ШФ

6.1. Несостоятельность прежних теорий струн с нулевой энергией

Наиболее радикальной из широко продвигавшихся моделей объединения была гипотеза о том, что фундаментальными объектами физики являются не локализованные частицы и непрерывные поля, а одномерные объекты – струны. В теориях релятивистских струн появляется критическая размерность пространства-времени: $D=26$ для бозонной струны, $D=10$ для фермионной струны и суперструны. Именно это ключевое свойство лежит в основе почти всех достижений струнных теорий.

В Приложении B показано, что критическая размерность является следствием наличия нулевой энергии струнных мод и необходимости вследствие этого нормального упорядочения операторов наблюдаемых. Критические размерности при этом следуют из требования сокращения аномалий, возникающих из-за остаточного вклада нулевых энергий струнных мод после их искусственной «регуляризации».

Но само возникновение расходящейся нулевой энергии означает несостоятельность такой теории объединения. Это потому, что «регуляризация» была оправдана как временная мера для полуфеноменологических теорий как аппроксимация неизвестного поведения на малых расстояниях. Но она недопустима для фундаментальной теории, претендующей на правильное описание физики на этих малых расстояниях, где гравитация не просто сильна, но даже доминирует.

Но, как будет показано ниже, в одной из моделей релятивистской струны при квантовании в соответствии с трактовкой ШФ нулевая энергия не возникает, а значит не будет и критической размерности. Такая теория струн физически состоятельна, но она уже не может решить проблемы объединения.

Если же попытаться фиксировать некую размерность пространства-времени из иных соображений даже в отсутствие критической размерности, например, введя особые симметрии, то и тогда этот класс моделей оказывается менее приемлемым по сравнению с моделями на базе локальных первичных объектов. Действительно, введение одномерных объектов с непрерывно распределённой плотностью энергии вдоль их длины, а также природа напряжений вдоль их длины вызывает ряд новых проблем, которые присутствовали в теориях струн, но не анализировались должным образом. Очевидно, что практически невозможно избежать скрытых до сих пор расходимостей из-за структуры любого одномерного объекта, не говоря уже об объектах более высокой размерности. В этом состоит высокая степень искусственности и внутренней противоречивости моделей с нелокальными фундаментальными объектами.

6.2. Последовательное квантование струн без нулевой энергии и без аномалий

Отсутствие энергии нулевых колебаний мод струн приводит к теории струн без аномалий, поскольку источником этой аномалии была энергия нулевых колебаний. Из-за отсутствия аномалии нет оснований фиксировать критическое измерение пространства-времени. Поэтому ниже будет сформулирована простейшая модель струны без нулевой энергии.

Рассмотрим стандартное действие для бозонной струны [8]:

$$S = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{h}\, h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\, \partial_\beta X_\mu\,, \tag{124}$$

где $h^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}(\tau,\sigma)$, $h = \left|\det h^{\alpha\beta}\right|$, $X^\mu = X^\mu(\tau,\sigma)$. Симметрии струны позволяют выбрать 2-метрику как $h_{\alpha\beta}(\tau,\sigma) = \eta_{\alpha\beta} = diag(1,-1)$ и (124) принимает вид:

$$S = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\,\partial_\alpha X^\mu\,\partial^\alpha X_\mu = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\,(\partial_\alpha X^\mu_R\,\partial^\alpha X_{\mu R} + \partial_\alpha X^\mu_L\,\partial^\alpha X_{\mu L}), \tag{125}$$

$$X^\mu(\tau,\sigma) = X^\mu_R(\tau-\sigma) + X^\mu_L(\tau+\sigma)\,. \tag{126}$$

Здесь правые X^μ_R и левые X^μ_L моды замкнутой струны являются решениями уравнений движения:

$$\partial_\alpha\partial^\alpha X^\mu = (\partial^2_\tau - \partial^2_\sigma)X^\mu = 0 \tag{127}$$

Координаты двух мод можно объединить в одну комплексную координату:

$$Y^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^\mu_R + iX^\mu_L), \quad Y^{\mu *} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^\mu_R - iX^\mu_L). \tag{128}$$

В терминах этой координаты действие приобретает вид:

$$S = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\,(\partial_\alpha Y^*_\mu\,\partial^\alpha Y^\mu + \partial^\alpha Y^\mu\partial_\alpha Y^*_\mu). \tag{129}$$

До квантования, т.е. на классическом уровне, переменные струны являются обычными функциями и поэтому переставимы, так что подынтегральное выражение в (129) эквивалентно выражению с минимальным лагранжианом:

$$S = -T\int d^2\sigma \partial_\alpha Y^*_\mu \partial^\alpha Y^\mu . \tag{130}$$

Классическую функцию действия именно в этой форме (130) и будем считать исходным пунктом для дальнейшего квантования.

В трактовке ШФ, во-первых, вместо суперпозиции мод с $\tau \pm \sigma$, идущих вправо или влево, каждая с положительными и отрицательными энергиями, выбирается как базовая одна из мод, например, правая с положительной энергией $Y^\mu_+(\tau-\sigma)$, движущаяся только вперёд во времени. Во-вторых, левая мода с положительной энергией $Y^\mu_+(\tau+\sigma)$ описывается как правая мода с отрицательной энергией $Y^\mu_-(\tau-\sigma)$, движущаяся только назад во времени. В-третьих, функцию действия (130) надо переписать с учётом этих двух пунктов:

$$S = -T\int d\sigma \left[\theta(\tau_1-\tau_0)\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \partial_\alpha Y^*_+ \cdot \partial^\alpha Y_+ - \theta(\tau_0-\tau_1)\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \partial_\alpha Y^*_- \cdot \partial^\alpha Y_- \right]. \tag{131}$$

Из уравнений движения (127) и граничных условий для замкнутых струн:

$$Y^\mu(\sigma) = Y^\mu(\sigma+2\pi), \quad Y^{\mu *}(\sigma) = Y^{\mu *}(\sigma+2\pi), \tag{132}$$

следует частотное разложение комплексной координаты:

$$\begin{aligned} Y^\mu(\tau-\sigma) &= Y^\mu_+ + Y^\mu_- = Y^\mu_0 + \frac{il}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha^\mu_n e^{-2in(\tau-\sigma)} + \alpha^\mu_{-n} e^{2in(\tau-\sigma)}), \\ Y^{\mu *}(\tau-\sigma) &= Y^{\mu *}_+ + Y^{\mu *}_- = Y^{\mu *}_0 - \frac{il}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha^{\mu *}_n e^{2in(\tau-\sigma)} + \alpha^{\mu *}_{-n} e^{-2in(\tau-\sigma)}), \end{aligned} \tag{133}$$

где $l^2 = 1/\pi T$. Отсюда следуют:

$$\begin{aligned} \dot Y^\mu &= \dot Y^\mu_+ + \dot Y^\mu_- = \dot Y^\mu_0 + l\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^\mu_n e^{-2in(\tau-\sigma)} - \alpha^\mu_{-n} e^{2in(\tau-\sigma)}), \\ \dot Y^{\mu *} &= \dot Y^{\mu *}_+ + \dot Y^{\mu *}_- = \dot Y^{\mu *}_0 + l\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^{\mu *}_n e^{2in(\tau-\sigma)} - \alpha^{\mu *}_{-n} e^{-2in(\tau-\sigma)}). \end{aligned} \tag{134}$$

Здесь времена τ умножаются только на положительные «частоты» $n > 0$ и суммы вкладов противоположного знака энергии записаны отдельно.

Сохраняющиеся токи трансляций координат $Y^\mu, Y^{\mu *}$ есть:

$$P^\mu_{\alpha\pm} = \pm T\,\partial_\alpha Y^{\mu *}_\pm, \quad \partial^\alpha P^\mu_{\alpha\pm} = 0. \tag{135}$$

Коммутаторы имеют вид:

$$[Y^\mu(\tau,\sigma'), P^\nu_\tau(\tau,\sigma)] = -i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma'). \tag{136}$$

Подстановка (133) и (134) даёт (ненулевые) коммутаторы для операторов мод:

$$[\alpha^\mu_m, \alpha^{\nu *}_n] = [\alpha^\mu_{-m}, \alpha^{\nu *}_{-n}] = -m\,\delta_{mn}\eta^{\mu\nu}. \tag{137}$$

Гамильтониан и киральный заряд состояний определяются как:

$$H_\pm = \pm T^{-1}\int_0^{2\pi} d\sigma\, P_{\alpha\pm}\cdot P^{\alpha *}_\pm, \quad \Lambda_\pm = \pm\int_0^{2\pi} d\sigma (P_{\tau\pm} Y_\pm - Y^*_\pm P^*_{\tau\pm}). \tag{138}$$

Подстановка частотных разложений даёт:

$$H = H_{+} + H_{-} = H_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^{\mu *} \alpha_{n\mu} - \alpha_{-n}^{\mu *} \alpha_{-n\mu}), \tag{139}$$

$$\Lambda = \Lambda_{+} + \Lambda_{-} = \Lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^{\mu *} \alpha_{n\mu} + \alpha_{-n}^{\mu *} \alpha_{-n\mu}). \tag{140}$$

В результате, в операторах алгебры Вирасоро (см. Приложение B)

$$L_m = L_{m+} + L_{m-} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m+n}^{\mu *} \alpha_{n\mu} \tag{141}$$

нормально-упорядочены изначально, $L_0 |0\rangle = 0$ и их коммутаторы имеют вид:

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n}. \tag{142}$$

Поскольку они не содержат аномалии или центрального расширения, то алгебра операторов группы Лоренца также замыкается без аномальных членов.

При необходимости переход к состояниям только с положительной энергией производится одним из двух способов, описанных в разделе 4, которые дадут $\alpha_{-n}^{\mu *} \alpha_{-n\mu} \to -b_n^{\mu *} b_{n\mu}$. В результате (139) и (140) переходят в:

$$H = H_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^{\mu *} \alpha_{n\mu} + b_n^{\mu *} b_{n\mu}), \quad \Lambda = \Lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^{\mu *} \alpha_{n\mu} - b_n^{\mu *} b_{n\mu}). \tag{143}$$

Таким образом, в гамильтониан (139) или (143) операторы мод входят в нормальном виде и в теории нет нулевой энергии.

Итак, теория бозонной струны не содержит прежних ограничений на размерность пространства-времени D. Аналогичная ситуация имеет место и в теории фермионной струны, поскольку и в ней при квантовании по ШФ также нет нулевой энергии, а значит нет и аномалий.

Заключение

В своей прежней стандартной формулировке теория релятивистских полей и струн была несостоятельной, так как неизбежно вела к расходящейся нулевой энергии. В трактовке ШФ, где знаки энергии и направления временной эволюции одинаковы, нулевая энергия отсутствовала в случае минимальных лагранжианов, но была проблема отрицательности нормы состояний, что недопустимо математически.

В статье показано, что при последовательном следовании трактовке ШФ начиная с функции действия нормы всех состояний становятся положительными, что делает теорию математически корректной, а выбор минимальных лагранжианов, которые не ведут к нулевой энергии, делает теорию физически состоятельной.

Более последовательным становится и построение причинных пропагаторов через оператор симметричного по времени хронологического упорядочения, что прямо ведёт к причинному пропагатору ШФ.

Новый метод квантования сначала применён к гармоническим осцилляторам с обеими знаками энергии, а затем к релятивистским полям и струнам. Результатом оказалась практически та же диаграммная техника стандартной формулировки КТП, но без ряда полуэмпирических рецептов прежнего формализма.

Метод ШФ-квантования без нулевой энергии вакуума находится в согласии с известными экспериментами, полностью объясняя их результаты через вклады полей реальных источников. Отсутствие нулевой энергии частично решает проблему космологической постоянной.

При определённом выборе лагранжиана моды релятивистской струны не содержать нулевой энергии в основном состоянии и поэтому теория конечна, но в такой состоятельной теории струн нет и аномалии в алгебре Вирасоро, а значит в ней нет и прежних критических размерностей пространства-времени. Также нет необходимости в суперсимметрии для решения проблемы энергии вакуума.

Более детальное изложение сформулированного в статье последовательного метода квантования на базе трактовки ШФ и его следствий приводится в книге [12].

Приложения.

A. Осциллятор с двумя знаками энергии в квантовой механике

Состояния гармонических осцилляторов с положительной энергией должны распространяются только вперёд, а с отрицательной энергией - только назад во времени. Лагранжиан L и гамильтониан H линейных гармонических осцилляторов с двумя знаками энергии осциллирующей частицы имеют вид:

$$L_\pm = \pm\frac{m}{2}(\dot{x}_\pm^2 - \omega_\pm^2 x_\pm^2), \quad H_\pm = \pm\frac{1}{2m}(p_\pm^2 + m^2\omega_\pm^2 x_\pm^2) \tag{144}$$

Здесь $x_\pm$ и $p_\pm = \pm m\dot{x}_\pm$ - вещественные координата и импульс частиц.

Волновое уравнение тогда принимает вид (в этом разделе $\hbar \neq 1$):

$$i\hbar\frac{\partial\psi_\pm}{\partial t} = \pm\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x_\pm^2} + (m\omega)^2 x_\pm^2\right)\psi_\pm. \tag{145}$$

Разложение по стационарным состояниям с энергиями $E_{n\pm} = \pm E_n$, $E_n = |E_{n\pm}|$ есть:

$$\psi_\pm(x_\pm, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_{n_\pm}(x_\pm)e^{-iE_{n_\pm}t/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_{n_\pm}(x_\pm)e^{\mp iE_n t/\hbar}, \quad n_\pm = 0,1,2,\ldots \tag{146}$$

Здесь $\psi_{n_\pm}(x_\pm)$ - пространственные части волновых функций, нормированные как:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_\pm\, \psi_{n\pm}^2(x_\pm) = 1. \tag{147}$$

Подстановка (146) в волновое уравнение (145) даёт стандартное уравнение:

$$\frac{d^2\psi_{n\pm}}{dx^2} + (k_n^2 - \lambda^2 x_\pm^2)\psi_{n\pm} = 0, \quad k_n^2 = \frac{2mE_n}{\hbar^2}, \quad \lambda = \frac{m\omega}{\hbar}. \tag{148}$$

Его решения выражаются через полиномы Эрмита H_n:

$$\psi_{n\pm}(x_\pm) = \frac{(m\omega/\pi\hbar)^{1/4}}{(2^n n!)^{1/2}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x_\pm^2}H_n[(m\omega/\hbar)^{1/2}x_\pm], \tag{149}$$

а собственные значения для k_n^2 и E_n равны:

$$k_n^2 = \lambda(2n+1), \quad E_n = \hbar\omega(n_\pm + 1/2). \tag{150}$$

Это даёт для уровней энергии системы из двух видов осцилляторов:

$$E_{n\pm} = \pm E_n = \pm\hbar\omega(n_\pm + 1/2). \tag{151}$$

Отметим, что знак энергии $E_{n\pm}$ определяется лишь знаком в гамильтониане $H_\pm$ (144), куда частота входит квадратично.

Уравнения движения, следующие из (144) и их решения имеют вид:

$$\ddot{x}_\pm + \omega^2 x_\pm = 0. \tag{152}$$

$$x_\pm = \frac{1}{\sqrt{2m\omega/\hbar}}(a_\pm e^{\mp i\omega t} + a_\pm^* e^{\pm i\omega t}), \quad p_\pm = \frac{-im\omega}{\sqrt{2m\omega/\hbar}}(a_\pm e^{\mp i\omega t} - a_\pm^* e^{\pm i\omega t}), \tag{153}$$

$$a_\pm = \frac{e^{\pm i\omega t}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega x_\pm + ip_\pm), \quad a_\pm^* = \frac{e^{\mp i\omega t}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega x_\pm - ip_\pm). \tag{154}$$

При квантовании коммутаторы $[x_\pm, p_\pm] = i\hbar$ ведут к коммутаторам:

$$[a_\pm, a_\pm^*] = 1, \quad [a_\pm, a_\pm] = [a_\pm^*, a_\pm^*] = 0. \tag{155}$$

При этом, операторы состояний с разными знаками энергии действуют в разных пространствах состояний и взаимно коммутируют. Волновые функции основных состояний для них также аналогичны:

$$\left|0_\pm\right\rangle = \psi_0(x_\pm) = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4} e^{-(m\omega)x_\pm^2/2\hbar}, \quad a_\pm\left|0_\pm\right\rangle = 0. \tag{156}$$

Волновые функции возбуждённых состояний обеих типов осцилляторов $\left|n_\pm\right\rangle$ строятся исходя из определений:

$$a_\pm\left|n_\pm\right\rangle = \sqrt{n_\pm}\left|n_\pm - 1\right\rangle, \quad a_\pm^*\left|n_\pm\right\rangle = \sqrt{n_\pm + 1}\left|n_\pm + 1\right\rangle, \ldots \tag{157}$$

где $n_\pm = 0,1,2,\ldots$ собственные значения $N_\pm = a_\pm^* a_\pm$, оператора числа квантов. Лестничные операторы при этом действуют на волновые функции в представлении чисел заполнения. Гамильтониан (144) в этом случае приобретает вид:

$$H_\pm = \pm\hbar\omega(a_\pm^* a_\pm + 1/2). \tag{158}$$

Итак, теория гармонического осциллятора, расширенная с включением состояний с отрицательной энергией, внутренне самосогласованна, если учтена эволюция назад во времени состояний с отрицательной энергией.

B. Нулевая энергия - источник аномалий и критической размерности струн

Действие для бозонной струны (125) ведёт к бесследовому тензору энергии-импульса и уравнениям связей ($\dot{X} = \partial_\tau X$, $X' = \partial_\sigma X$) [8]:

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{T\sqrt{h}}\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\partial_{\alpha'} X \cdot \partial^{\alpha'} X\right) = 0, \tag{159}$$

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2) = 0, \quad T_{10} = T_{01} = \dot{X} \cdot X' = 0. \tag{160}$$

Уравнения движения и их решения имеют вид:

$$\partial_\alpha\partial^\alpha X = (\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2)X = 0, \quad X(\tau,\sigma) = X_R(\tau-\sigma) + X_L(\tau+\sigma). \tag{161}$$

Разложение координат по струнным модам, следующее из (161) и граничных условий для открытой струны $X'(\tau,0) = X'(\tau,\pi) = 0$, имеет вид:

$$X^{\mu}(\tau,\sigma)=x^{\mu}+l^{2}\tau p^{\mu}+il\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_{n}^{\mu}e^{-in\tau}\cos n\sigma \tag{162}$$

где $l^2=1/\pi T$. Ненулевые коммутаторы равны ($P^{\nu}=T\dot{X}^{\nu}$):

$$[X^{\mu}(\tau,\sigma),P^{\nu}(\tau,\sigma')]=i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma'), \tag{163}$$

$$[\alpha_m^{\mu},\alpha_n^{\nu}]=m\eta^{\mu\nu}\delta_{0,m+n}, \quad [x^{\nu},p^{\mu}]=i\eta^{\mu\nu}. \tag{164}$$

Гамильтониан мод и операторы алгебры Вирасоро L_m было принято записывать в нормально-упорядоченном виде:

$$H=\frac{T}{2}\int_0^{2\pi}d\sigma(\dot{X}^2+X'^2)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}:\alpha_{-n}^{\mu}\alpha_{n\mu}:,\quad L_m=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}:\alpha_{m-n}^{\mu}\alpha_{n\mu}:, \tag{165}$$

где $\alpha_0^{\mu}=lp^{\mu}$. Для нахождения алгебры операторов вычислим коммутатор $[L_m,L_n]$, используя соотношения:

$$[A,BC]=ABC-BAC+BAC-BCA=[A,B]C+B[A,C] \tag{166}$$

$$\begin{aligned}[\alpha_m^i,L_n]&=\frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left\{[\alpha_m^i,\alpha_p^j]\alpha_{n-p}^j+\alpha_p^j[\alpha_m^i,\alpha_{n-p}^j]\right\}=\\&=\frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left\{\delta_{m+p}\alpha_{n-p}^j+\delta_{m+n-p}\alpha_p^j\right\}m\delta^{ij}=m\alpha_{n+m}^i\end{aligned} \tag{167}$$

Приведя коммутаторы к виду:

$$2[L_m,L_n]=\sum_{p=-\infty}^{\infty}[:\alpha_p^j\alpha_{m-p}^j:,L_n]=\sum_{p=-\infty}^{0}[\alpha_p^j\alpha_{m-p}^j,L_n]+\sum_{p=1}^{\infty}[\alpha_{m-p}^j\alpha_p^j,L_n], \tag{168}$$

и вычислив эти выражения с учётом (167), найдём соотношения алгебры операторов:

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{D}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n}, \tag{169}$$

включающих аномальный член, или центральное расширение алгебры Вирасоро.

Для того, чтобы выяснить источник происхождения этой аномалии вычислим коммутатор операторов L_m в случае, когда в L_m не производится нормальное упорядочение. Тогда вместо (165) имеем

$$L_m=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_{m-n}^{\mu}\alpha_{n\mu}, \tag{170}$$

и коммутатор принимает вид:

$$2[L_m,L_n]=-\sum_{p=-\infty}^{\infty}[L_n,\alpha_p^j\alpha_{m-p}^j]=-\sum_{p=-\infty}^{\infty}[L_n,\alpha_p^j]\alpha_{m-p}^j-\sum_{p=-\infty}^{\infty}\alpha_p^j[L_n,\alpha_{m-p}^j]. \tag{171}$$

Подставив сюда (169) и произведя в первой сумме сдвиг $p\to p-n$, получаем:

$$2[L_m, L_n] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} p\alpha_{n+p}^j \alpha_{m-p}^j + \sum_{p=-\infty}^{\infty} (m-p)\alpha_p^j \alpha_{m+n-p}^j =$$
$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p-n)\alpha_p^j \alpha_{m+n-p}^j + \sum_{p=-\infty}^{\infty} (m-p)\alpha_p^j \alpha_{m+n-p}^j = (m-n)\sum_{p=-\infty}^{\infty} \alpha_p^j \alpha_{m+n-p}^j, \quad (172)$$

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}. \quad (173)$$

Это – выражение для алгебры Вирасоро без аномалии или центрального расширения. Таким образом, источником аномалии в алгебры Вирасоро (169) является процедура нормального упорядочения, произведённая в (167).

Рассмотрим один эвристический способ получения критической размерности для бозонной струны $D = 26$. Поскольку L_0 из (165) есть гамильтониан струны (165), то в уравнении для массы физического состояния $|\varphi\rangle$:

$$(L_0 - a)|\varphi\rangle = 0 \quad (174)$$

константа нормального упорядочения a представляет собой нулевую энергию мод. Для появления безмассовых состояний необходимо, чтобы было $a = 1$. В то же время, при квантовании в калибровке светового конуса, когда квантуются только $(D-2)$ поперечных координат струны, оператор энергии мод записывался как:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} :\alpha_{-n}^i \alpha_n^i: + \frac{D-2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (175)$$

После регуляризации, т.е. приравнивания суммы натуральных чисел к дзета-функции Римана $\zeta(s)$ при $s = -1$, т.е. $\zeta(-1) = -1/12$, для последнего члена в (175) получалось значение $-(D-2)/24$. Приравнивание этого к $-a = -1$ в (174) затем давало критическую размерность пространства-времени $D = 26$. Таким образом, и в данном способе получения критической размерности существование такой выделенной размерности следует из существования нулевой энергии мод.

Наиболее строгим расчётом критической размерности в теории струн является вычисление коммутатора генераторов группы Лоренца $J^{\mu\nu}$. В калибровке светового конуса для лоренц-инвариантности коммутатор $[J^{i-}, J^{j-}]$ должен быть равен нулю, но он оказывался пропорциональным:

$$[J^{i-}, J^{j-}] \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta_m (\alpha_{-m}^i \alpha_m^j - \alpha_{-m}^j \alpha_m^i), \quad \Delta_m = \frac{26-D}{12}(m + m^{-1}) + \frac{2}{m}(1-a). \quad (176)$$

Поэтому условие лоренц-инвариантности теории $\Delta_m = 0$, когда алгебра замыкается, выполнялось лишь при $D = 26$ и $a = 1$.

В теории струн хорошо известно, что эта аномалия в группе Лоренца является следствием D-зависимости аномалии в алгебре Вирасоро (169) в калибровке светового конуса, где D заменяется на $D-2$. Таким образом, появление критической размерности в теории струн является следствием нормального упорядочения операторов наблюдаемых. Выводы для фермионной струны аналогичны и поэтому этот же вывод справедлив и для суперструн.

Литература

1. Dirac, P.A.M. (1930) *Proc. R. Soc.*, A **126**, 360.
2. Pauli, W., Weisskopf, V. (1934) *Helv. Phys. Acta*, **7**, 709.
3. Pauli W. (1943) *Rev. Mod. Phys*. **15**, 175.
4. Pavšič, M. (1999) *Phys. Lett*. A**254**, 119.
5. Stueckelberg, E.C.G. (1941) *Helv. Phys. Acta*, **14**(7) 588.
6. Feynman R. (1949) *Phys. Rev*., **76**, 749.
7. Dyson F. J. (1949) *Phys. Rev*., **75**(3) 486.
8. Грин М., Шварц Дж., Виттен Е. (1990) *Теория суперструн*. т.1. М.
9. Бьёркен Дж., Дрелл С. (1964) *Релятивистская квантовая теория*, т. 1-2. М.
10. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. (1984) *Квантовая теория поля*. т. 1-2, М.
11. Закир, З. (2020) *Квант. и грав. физ.*, **1**:002-7128.
12. Закир З. (2021) *Конечная квантовая теория поля*. ЦТФА, Т.